CHAPITRE II: COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Produit de sous-espaces vectoriels

Proposition : Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, lorsque $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, alors

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p = \prod_{i=1}^{p} E_i \text{ est encore un espace vectoriel sur le corps } \mathbb{K}$$

pour les lois naturelles : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \forall (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$\alpha(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) =$

Le vecteur nul est et l'opposé de $(x_1, \dots, x_p)$ est

Si les p espaces vectoriels sont de dimensions finies alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est de dimension finie avec

$$\dim\left(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p\right) =$$

II) Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe de sous-espaces vectoriels

II-1) Sous-espace vectoriels supplémentaires (Rappel PTSI)

EXEMPLE N° 1 On définit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ P(1) & P'(1) \end{pmatrix} \mid P \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$$ et G le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que F est un sev de $M_2(\mathbb{R})$ et préciser $\dim F$.

2. Rappeler $\dim G$ et expliciter une base de G

3. Prouver que F et G sont des supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$.

4. Décomposer la matrice I_2 dans cette somme directe.

EXEMPLE N° 2 Dans cet exercice, on assimile le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ et la fonction polynômiale $[x \mapsto P(x)] \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

1. Démontrer que $F = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = f(1) = 0 \right\}$ et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Décomposer la fonction exp dans cette somme directe.

II-2) Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

On généralise la notion de somme de sev rencontrée pour 2 sev à n sev.

Proposition et définition : Somme finie de sous-espace vectoriel

Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E ($p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$), on définit

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{i=1}^{p} F_i = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists (x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i \right\} = \left\{ x_1 + x_2 + \cdots + x_p \;\middle|\; \forall i \in [\![1, p]\!] ; x_i \in F_i \right\}$$

C'est un sev de E et c'est le plus petit, au sens de l'inclusion, des sev de E qui contient tous les F_i.

II-3) Somme directe de sous-espace vectoriel

Définition : Somme directe d'un nombre fini de sous-espace vectoriel

Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E ($p \in \mathbb{N} - \{0,1\}$),
on dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe lorsque tout vecteur de F se décompose de manière unique selon les $(F_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ autrement dit $\forall x \in F = \sum_{i=1}^{p} F_i,\ \exists!(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times F_p,\ x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$

On note alors : $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

Caractérisation d'une somme directe

Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E ($p \in \mathbb{N} - \{0,1\}$),
la somme $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe $\Leftrightarrow$ 0_E a pour unique décomposition dans la somme la décomposition triviale

c'est à dire : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p,\ \sum_{i=1}^{p} x_i = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E$

EXEMPLE N° 3 On fixe un polynôme N de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$ et un entier $m > n$. On appelle:

$F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $G = \left\{P \in \mathbb{R}[X], \mid N \text{ divise } P \text{ et } \deg P < m\right\}$ et H l'ensemble des multiples de X^m

Démontrer que $\mathbb{R}[X] = F \oplus G \oplus H$

Cas particulier de deux sev : Si F et G sont des sev de E, alors : $F + G$ en somme directe $\Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$

Attention il n'y a pas de généralisation $F \cap G \cap H = \{0_E\} \not\Rightarrow$ F, G **et** H **en somme directe**

Contre-exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$, $G = \mathrm{Vect}\big((0,1)\big)$ et $H = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$

Proposition et définition : Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, on considère des bases $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2, \dots, \mathscr{B}_p$ respectivement de $F_1, F_2, \dots, F_p$.
Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont en somme directe, alors

$$\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathscr{B}_i \text{ est une base de } \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \text{ : c'est une base adaptée à la décomposition } \bigoplus_{i=1}^{p} F_i.$$

Corollaire : dimension d'une somme directe

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sev d'un espace vectoriel de E de dimension finie,

$$\text{si } F_1, F_2, \dots, F_p \text{ sont en somme directe, alors} \quad \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

Méthodologie : Comment justifier que $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$ si $\dim E < +\infty$?

1. On commence par justifier que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe en montrant que 0 admet pour seule décomposition $0 = 0 + \dots + 0$
2. On vérifie alors que $\dim F_1 + \dots + \dim F_p = \dim E$
3. On peut alors conclure :

$$\begin{cases} \dim \bigoplus_{i=1}^{p} F_i =_{\text{par } 1} \dim F_1 + \dots + \dim F_p =_{\text{par } 2} \dim E \\ \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \subset E \end{cases} \Leftrightarrow \bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E \quad \text{avec le résultat } \begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases} \Leftrightarrow F = G$$

II-4) *Sous-espace vectoriel stables*

Définitions : sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme et endomorphisme induit

Étant donné $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sev de E, le sous-espace vectoriel F est stable par u si $u(F) \subset F$
La restriction $v = u_{/F}$ de u à F est alors un endomorphisme de F appelé l'endomorphisme induit par u sur F.

Remarques : On peut toujours définir la restriction $u_{/F}$ même si F n'est pas stable par u. Dans ce cas,c'est toujours une application linéaire de $\mathscr{L}(F, E)$ mais ça n'est pas forcément un endomorphisme de F !

Exemple : Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel, Im f et Ker f sont des sous-espaces stables par f
Si p est un projecteur, l'endomorphisme q induit par p sur Im p est injectif

EXEMPLE N° 4 On considère l'endomorphisme $u = [P \mapsto P']$ de $\mathbb{R}[X]$

1. Montrer que u laisse stable les sev $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme u_n induit par u sur $\mathbb{R}_n[X]$

Si E est un espace de dimension finie et si F est un sev de E stable par l'endomorphisme u.
Considérons une base $\mathscr{B}_{\mathrm{F}} = (e_1, \dots, e_p)$ de F qu'on complète en une base de $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.
Précisons alors la matrice de u dans cette base E qu'on dit adaptée à la stabilité de F par u :

F étant stable par u : $\forall k \in [\![1, p]\!],\ u(e_k)$

on en déduit la forme de la matrice :

Caractérisation matricielle en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie rapportée à une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$

- si F est un sev de E de dimension p stable par u et si $\mathscr{B}$ est une base adaptée, on a
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{O} & \mathrm{C} \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} \mathrm{A} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}) \\ \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{C} \in \mathrm{M}_{n-p,n-p} \end{cases}$$
- si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{O} & \mathrm{C} \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} \mathrm{A} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}) \\ \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \\ \mathrm{C} \in \mathrm{M}_{n-p,n-p} \end{cases}$ alors $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est un sev stable par u

Remarque : Si $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ où F et G sont tous les deux stables par l'endomorphisme u de E alors

dans une base $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\mathrm{F}} \cup \mathscr{B}_{\mathrm{G}}$ adaptée, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) =$

III) Hyperplan

Définition : Hyperplan

On appelle hyperplan de l'espace vectoriel E de dimension finie un sous-espace vectoriel de E qui admet une droite vectorielle comme supplémentaire autrement dit

H est un hyperplan de E si H est un sev de E et s'il existe $a \in \mathrm{E}$ avec $a \neq 0$ et $\mathrm{E} = \mathrm{H} \oplus \mathrm{Vect}(a)$

Caractérisation par la dimension des hyperplans

Si E est une espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ alors

les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$

Remarque : Comme il n'y a pas d'unicité du supplémentaire, il n'y a pas unicité du vecteur a définissant le supplémentaire de H. En fait, si H est un hyperplan de E alors : S est un sev avec $\mathrm{E} = \mathrm{S} \oplus \mathrm{H} \Leftrightarrow \exists a \in \mathrm{E} - \mathrm{H},\ \mathrm{S} = \mathrm{Vect}(a)$

Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont donc repérées par une équation

Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont donc repérés par une équation

Théorème : équation d'un hyperplan

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$,

H est un hyperplan de E $\Leftrightarrow$ H = Ker φ où $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ est non nulle

Dés lors, si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E :

$$\mathrm{H} = \left\{x \in \mathrm{E} \mid \varphi(x) = 0_{\mathrm{E}}\right\} = \left\{x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \;\middle|\; (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n \text{ et } x_1 \underbrace{\varphi(e_1)}_{=a_1 \in \mathbb{K}} + \cdots + x_n \underbrace{\varphi(e_n)}_{=a_n \in \mathbb{K}} = 0\right\}$$

autrement dit : $\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in \mathrm{H} \Leftrightarrow a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$

L'hyperplan H est ainsi repérée, dans la base $\mathscr{B}$, par une équation linéaire $\quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \quad$ non triviale

(l'un des scalaires a_i au moins est non nul)

Réciproquement, un sous-ensemble de E caractérisée par une équation linéaire non triviale dans une base (quelconque) de E est un hyperplan.

Remarque : Si H est un hyperplan de l'espace vectoriel E de dimension finie, alors

il n'y a pas unicité de l'équation linéaire définissant H. En fait, toutes les équations de H sont proportionnelles

EXEMPLE N° 5 Justifier, sans calcul, que F et G sont des espaces vectoriels et préciser la dimension lorsque:

$$\mathrm{F} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_n = 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(\mathrm{M}) = 0\}$$

EXEMPLE N° 6 Démontrer que $\quad \mathrm{H} = \left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \;\middle|\; \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\} \quad$ est un hyperplan.

Préciser une équation de H dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et une base de H

Théorème : Équations d'un sous espace vectoriel en dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$

- l'intersection de p hyperplans de E est un espace de dimension au moins $n-p$
- un sev de dimension $n-p$ est une intersection de p hyperplans de E

Interprétation géométrique des solutions d'un système linéaire

Considérons un système linéaires (S) homogène associé à une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Chacune des lignes de ce système correspond à une équation linéaire d'un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.
L'ensemble des solutions du système est donc l'intersection de p hyperplans de $\mathbb{K}^n$: c'est donc un sev de $\mathbb{K}^n$ de dimension au moins $n-p$ d'après le résultat précédent. Elle sera égale exactement à $n-p$ si les lignes de A sont linéairement indépendantes.
Exemple : Sans résoudre les systèmes prévoir la dimension de l'ensemble des solutions pour

$$(S_1) : \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}, \quad (S_2) : \begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ z=0 \end{cases}, \quad (S_3) : \begin{cases} x+2y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

IV) Trace

On notera $[M]_{ij}$ le coefficient situé à la ligne i colonne j de la matrice M lorsque $M \in M_{np}(\mathbb{K})$ où $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$

Définition : Trace d'une matrice carrée

Si A est une matrice carrée, on appelle trace de A qu'on note tr(A) la somme des coefficients diagonaux de A.

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}$$

Proposition : Linéarité de la trace

La trace est une application linéaire : $\left[\begin{array}{rcl} \mathrm{tr} : M_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array} \right] \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

Autrement dit : $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \mathrm{tr}(\alpha A + B) = \alpha \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

EXEMPLE N° 7 On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer tr(A), tr(B), tr(AB) et tr(BA)

Proposition : Commutativité de la trace

La trace est commutative c'est à dire que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \quad \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Proposition : Trace et transposition

Si $A \in M_n(\mathbb{K}), \quad \mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$

EXEMPLE N° 8 Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les matrices A, B, C, D de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $\begin{cases} AC + DB = I_n \\ CA + BD = 0 \end{cases}$?

V) *Déterminant d'une matrice carrée*

V-1) *Définition du déterminant*

Théorème (admis) et définition : Déterminant d'une matrice carrée

Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qu'on appelle le déterminant telle que :

i) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ;

ii) l'échange de 2 colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 (antisymétrique par rapport aux colonnes) ;

iii) le déterminant de la matrice I_n vaut 1

On notera $\det A$ le déterminant de la matrice A

Dans le cas $n=2$, on a : $\det A = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

On rappelle qu'on peut interpréter géométriquement ce déterminant dans le plan :

Dans le cas $n=3$, le déterminant coïncide avec la notion de produit-mixte de géométrie dans l'espace :

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

On rappelle qu'on peut interpréter géométriquement ce déterminant dans l'espace :

On généralise la notation précédente : Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$ alors $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

V-2) *Propriétés du déterminant*

Propositions : Opérations sur les déterminants

Si on note C_j la colonne j de la matrice A :

- Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, alors $\det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n) = -\det(C_1,\dots,C_j,\dots,C_i,\dots,C_n)$
  autrement dit $\boxed{\text{le déterminant est multiplié par } -1 \text{ si on réalise l'opération } C_i \leftrightarrow C_j}$
- Pour tout scalaire α, $\det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n) = \det(C_1,\dots,C_i+\alpha C_j,\dots,C_n$ à cause de i)
  autrement dit $\boxed{\text{le déterminant est invariant par les opérations } C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j}$
- Si $C_j = kC_i$ avec $k \in \mathbb{K}$,
  $\det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j,\dots,C_n) = \det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_j - kC_i,\dots,C_n)$ en utilisant $C_j \leftarrow C_j - kC_i$
  $= \det(C_1,\dots,C_i,\dots,O_{n,1},\dots,C_n) = 0$ par linéarité selon la colonne j
  autrement dit $\boxed{\text{le déterminant est nul s'il possède deux colonnes colinéaires}}$

  en particulier : <u>le déterminant est nul s'il l'une des colonnes est nulles ou s'il y a deux colonnes identiques.</u>
  et même : <u>le déterminant est nul si les colonnes de A sont liées</u>
- Pour tout scalaire α, $\det(\alpha A) = \det(\alpha C_1,\dots,\alpha C_i,\dots,\alpha C_n) = \alpha^n \det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n) = \alpha^n \det(A)$
  par linéarité selon les n colonnes autrement dit $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \det(\alpha A) = \alpha^n \det A}$

Proposition (admis) : Déterminant d'une transposée

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors $\det(A^T) = \det A$

COROLLAIRE : Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes

Proposition (admis) : Déterminant d'un produit

Si $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ alors : $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$

Proposition : Déterminant et matrice inversible

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors

A est inversible notée $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ et, dans ce cas : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

V-3) Calcul du déterminant par développement

Méthode (admis) : calcul du déterminant par développement

Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle mineur associée au coefficient a_{ij} de A
le déterminant Δ_{ij} d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de A

On dit

- qu'on calcule le déterminant en développant selon la colonne j de A avec : $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$
- qu'on calcule le déterminant en développant selon la ligne i de A avec : $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

EXEMPLE N° 9 Calculer $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

Proposition : déterminant d'une matrice triangulaire

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure, alors son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux.

Remarque 1 : C'est donc aussi le cas pour une matrice diagonale !

Remarque 2 : Attention au signe pour des matrices triangulaires par rapport à l'anti-diagonale...

EXEMPLE N° 10 *Calcul d'un déterminant tri-bandes d'ordre n*

Calculer , pour tout entier naturel n non nul, la valeur du déterminant d'ordre n: $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

V-4) Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition : Déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n

Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ rapporté à une base $\mathscr{B}$
pour une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E, on définit le déterminant de cette famille relativement à la base $\mathscr{B}$, qu'on note $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ comme le déterminant de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Ce déterminant hérite donc des propriétés du déterminant des matrices carrées

Caractérisation des bases par le déterminant :

Si E est un espace de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E

$(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E $\Leftrightarrow$ $(x_1, \dots, x_n)$ est libre
$\Leftrightarrow$ Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$
$\Leftrightarrow$ Il existe une base $\mathscr{B}$ de E avec $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

Méthode : Application pour la recherche de l'équation d'un hyperplan

Si E est un espace de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_{n-1})$ une base de l'hyperplan H de E

$$x \in \mathrm{H} \Leftrightarrow \text{Pour toute base } \mathscr{B} \text{ de E, } \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = 0$$

EXEMPLE N° 11 *Diverses utilisations des déterminants*

1. Dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne les points $A(-3,1,1)$, $B(3,3,1)$ et $C(9,0,3)$. Déterminer le volume du tétraèdre OABC en admettant que c'est le sixième du volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$
2. Donner une équation dans la base canonique de l'hyperplan $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}(1+\mathrm{X}, 1+\mathrm{X}+\mathrm{X}^2)$ de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$
3. Prouver que les vecteurs $\vec{u} = (a, -a, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, a, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 0, a)$ et $\vec{t} = (1, 1, 1, 1)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $a \neq 0$
4. Donner une CNS sur les paramètres a et b pour que $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{pmatrix}$ soit inversible.

VI) Matrices semblables

VI-1) Définition et caractérisation

Définition : Matrice semblable

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$, on dit que les matrices A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice P inversible (càd $P \in GL_n(\mathbb{K})$) telle que : $B = P^{-1}AP$

C'est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$ puisque :

- c'est une relation
- c'est une relation
- c'est une relation

Théorème : Caractérisation des matrices semblables

Deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes d'un espace E de dimension n.

Proposition : Des invariants par similitude

Deux matrices semblables ont le même rang, la même trace et le même déterminant.

Attention ! Il s'agit seulement de condition nécessaires...

EXEMPLE N° 12 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, les matrices suivantes sont-elles semblables à A ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On pourra calculer $rg(A_3 - I_3)$

VI-2) Trace et déterminant d'un endomorphisme

Définitions : trace et déterminant d'un endomorphisme

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace de dimension finie alors on définit la trace de f notée $\mathrm{tr}(f)$ et le déterminant de f noté $\det(f)$ comme la trace et le déterminant de la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ quelconque de E

Propositions :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f et g des endomorphismes de E,

- Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, $\det f =$
- Si $\alpha \in \mathbb{K}$, $\det(\alpha f) =$
- $\det(f \circ g) =$
- f est un automorphisme $\Leftrightarrow$

EXEMPLE N° 13 On définit f sur $\mathbb{R}_n[X]$ par: $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = XP' + P(2)$.
Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa trace et son déterminant.