CHAPITRE XIV: COURBES ET SURFACES DE L'ESPACE

Dans tout le chapitre, on travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

I) *Révision de géométrie dans l'espace (révisions de PTSI)*

EXEMPLE N° 1 L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère:

- la droite $\mathscr{D}$ qui passe par $A(3,2,1)$ et qui est dirigée par $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$
- la droite $\mathscr{D}'$ d'équations $\mathscr{D}' : \begin{cases} 2x + z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$
- le plan $\mathscr{Q}$ d'équation $x + y + z = 1$
- le plan $\mathscr{P}_m : \ mx - y + (2-m)z + m = 4$ où m est un paramètre réel.
- S est la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$

1. **a.** Donner un point A' et un vecteur directeur $\vec{u}'$ de la droite $\mathscr{D}'$.

b. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont-elles coplanaires ?

c. On pose $\vec{u}'' = \vec{u} \wedge \vec{u}'$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ issue de A' dirigée par $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$.

d. Déterminer le point A'' d'intersection de $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$

e. Vérifier que la droite $\mathscr{D}'' = A'' + \mathrm{Vect}(\vec{u}'')$ est une perpendiculaire commune aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$

2. **a.** Justifier que l'équation définissant $\mathscr{P}_m$ définit bien toujours un plan et que l'intersection $\Delta_m = \mathscr{P}_m \cap \mathscr{Q}$ définie une droite pour toutes les valeur de m.

b. Préciser un vecteur normal $\vec{n}_m$ de $\mathscr{P}_m$ et un vecteur directeur $\vec{u}_m$ de Δ_m

c. Démontrer qu'il y a une droite Δ fixe (càd qui ne dépend pas de m) qui est incluse dans tous les plans $\mathscr{P}_m$

d. Prouver que les droites Δ_m sont toutes sécantes en un point fixe C

3. **a.** Démontrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

b. Préciser la nature de l'intersection de S et du plan $\mathscr{Q}$.

II) *Courbes paramétrées dans l'espace*

Définition : Courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$, point régulier de la courbe

Une courbe paramétrée de l'espace est une fonction vectorielle $\left[\mathrm{M} : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\right]$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Son support $\mathscr{C} = \left\{\mathrm{M}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right) \mid t \in \mathrm{I}\right\}$ est une courbe et on dit que $\mathrm{M}(t)$ est le point de paramètre t.

x, y et z sont les fonctions coordonnées et on définit souvent la courbe par : $\mathscr{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in \mathrm{I}$

Définitions : Courbe plane et gauche, point régulier d'une courbe de classe C^1 et courbe régulière

- On dit qu'une courbe de l'espace est **une courbe plane** lorsqu'elle est incluse dans un plan.
  Lorsque une courbe de l'espace ne peut pas être incluse dans un plan, on dit que la courbe est une courbe gauche.
- Lorsque la courbe $[t \mapsto \mathrm{M}(t)]$ est de classe C^1 sur I, le **point** $\mathrm{M}(t)$ est **régulier** lorsque $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

  Si le point n'est pas régulier, il est stationnaire. La **courbe** est **régulière** lorsque tous ses points sont réguliers.

Proposition : Tangente à une courbe paramétrée de classe C^1

- Si $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}(t_0)$ est un point d'une courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par $[t \mapsto \mathrm{M}(t)]$ où $t \in \mathrm{I}$, on dit que
  $\mathscr{C}$ possède une tangente en M_0 lorsque les droites $\left(\mathrm{M}_0\mathrm{M}(t)\right)$ ont une position limite lorsque t tend vers t_0.
- Si la courbe $\mathscr{C}$ est C^1 sur I et si $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}(t_0)$ est un point régulier de $\mathscr{C}$ alors
  la droite $\mathscr{T}_0 = \mathrm{M}_0 + \mathrm{Vect}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)$ est la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.

EXEMPLES L'espace est rapporté à un repère euclidien orthonormé $\left(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

- la droite Δ issue du point $\mathrm{A}(1,2,3)$ et dirigée par $2\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$ est une courbe paramétrée :

C'est une courbe plane qui est incluse dans une infinité de plan...Par exemple :

- La courbe paramétrée $\mathscr{C} : \begin{cases} x(t) = 2\cos(t) \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 1 + \sin(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est

Le point $\mathrm{A}(0,0,2)$ est le point de paramètre $t =$ de $\mathscr{C}$: il est régulier car

La tangente en A à $\mathscr{C}$ est donc la droite

- On définit l'hélice $\mathscr{H} : \begin{cases} x = \mathrm{R}\cos t \\ y = \mathrm{R}\sin t \\ z = ht \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ où R et h sont des réels strictement positifs fixés.

Montrer que l'hélice est une courbe régulière dont les tangentes forment un angle constant avec l'axe $\mathrm{O} + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{k})$.

III) Surfaces

Définition : Surface donnée par une représentation cartésienne

On peut définir une surface S par une équation cartésienne $f(x,y,z)=0$ avec $\left[f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\right]$ C^1 sur l'ouvert $\mathcal{U}$

$$S=\left\{M(x,y,z)\mid(x,y,z)\in\mathcal{U}\text{ et }f(x,y,z)=0\right\}$$

On définit, ainsi, les **surfaces de niveaux** associées à une fonction $\left[g:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\right]$ de classe C^1 sur l'ouvert $\mathcal{U}$ comme les surfaces $S_\lambda:\ g(x,y,z)=\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$

Définition : Surface paramétrée

Une surface paramétrée de l'espace est une application $\left[M:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\right]$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Son support $S=\left\{M(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\mid(u,v)\in\mathcal{U}\right\}$ est une surface et on note : $S:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases},(u,v)\in\mathcal{U}$

On dit que $M(u,v)$ est le point de paramètre (u,v) et x, y et z sont les fonctions coordonnées (de $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$).

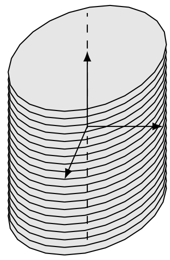
EXEMPLE

• Le plan Π passant en $M_0(x_0,y_0,z_0)$ dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$ et normal à $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est une surface

qui est paramétrée par

ou bien définie par la représentation cartésienne :

LE CYLINDRE DE RÉVOLUTION



• Considérons un cylindre C de révolution de rayon R et d'axe $O+\text{Vect}(\vec{k})$
Il a pour équation cartésienne

On peut proposer une représentation paramétrique de ce cylindre :

• De façon analogue, on peut modifier la base du cylindre (ie prendre une courbe plane usuelle autre qu'un cercle) :
la surface d'équation $S:\ \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ représente

et une représentation paramétrique de S est :

On distingue en particulier des surfaces qui sont les analogues dans l'espace des courbes représentatives dans le plan c'est à dire que l'une des coordonnées est fonction des autres coordonnées. Nous avons étudié, en application du théorème spectral, la recherche d'extrema et la présence de points cols pour ces surfaces.

Proposition : Surfaces définies par une équation $z=g(x,y)$

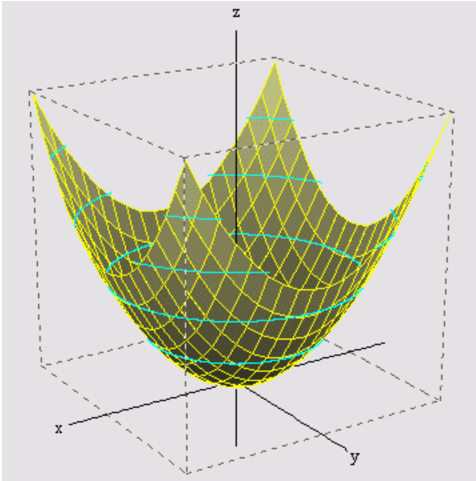
Si $\left[g:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right]$ est une application de classe C^1 alors,

- l'équation cartésienne $z=g(x,y)$ définie une surface S de $\mathbb{R}^3$
- on obtient facilement une représentation paramétrique de cette surface : $S:\begin{cases}x=u\\y=v\\z=g(u,v)\end{cases},(u,v)\in\mathcal{U}$

EXEMPLE Décrire la surface S d'équation S : $z = x^2 + y^2$. On pourra, pour cela, réaliser des sections planes de S avec des plans normaux aux axes du repère.

LE PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION

d'équation : $z = x^2 + y^2$



Le passage, pour une surface donnée, d'une représentation à l'autre est rarement simple...

L'élimination des paramètres (u, v) dans les équations d'une surface paramétrée S permet d'obtenir une équation cartésienne d'une surface S_1 qui contient S. **Attention! Ces deux surfaces sont rarement égales...**

Exemple : La surface S : $\begin{cases} x = u \\ y = uv^2 \\ z = u^2v^2 \end{cases}$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est incluse dans la surface S_1 d'équation

mais ces surfaces ne sont pas égales car

Le passage d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique n'est également pas toujours facile à obtenir. Conformément au programme, on admettra que, pour toute surface donnée par une équation cartésienne, il existe localement un paramétrage de classe C^1.

IV) Sections planes, courbes tracées sur une surface

IV-1) Section plane d'une surface

Si S_1 et S_2 sont deux surfaces, $S_1 \cap S_2$ peut être de nature très diverses en toute généralité : cette intersection peut être vide, réduite à un point, représenter une courbe voir même une surface!
Exemple : Que peut valoir l'intersection de deux sphères?

EXEMPLE N° 2 L'espace est rapporté à un repère euclidien orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les sphères $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8 = 0$ et S_2 de centre $\Omega_2(1, 2, 1)$ et de rayon $R_2 = 2$
Étudier $S_1 \cap S_2$ et préciser la position relative des deux sphères.

La question de la nature de l'intersection de deux surfaces S_1 et S_2 n'est pas un attendu du programme sauf si l'une de ces surfaces est un plan : on réalise alors une section plane de la surface.

Définition : Section plane d'une surface

Lorsqu'on étudie l'intersection d'une surface avec un plan, on dit qu'on réalise une section plane de la surface.

Des sections planes d'une surfaces avec des plans normaux aux axes du repère permettent en général d'appréhender l'allure de cette surface.

EXEMPLE : Déterminer les sections planes de S par des plans normaux aux axes du repère lorsque S est un cylindre de révolution d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ où $R > 0$.

IV-2) Courbes tracées sur une surface

Définition : Courbe tracée sur une surface

On dit qu'une courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur une surface S lorsque la courbe $\mathscr{C}$ est incluse dans la surface S.

- Lorsque S est donnée par l'équation cartésienne $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$

  et que la courbe $\mathscr{C}$ est paramétrée par $\left[\begin{array}{ccc} \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \big(x(t), y(t), z(t)\big) \end{array}\right]$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$

  il suffit de vérifier que : $\forall t \in \mathrm{I},\ \mathrm{F}\big(x(t), y(t), z(t)\big) = 0$
- Lorsque S est paramétrée par $\left[\begin{array}{ccc} f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \end{array}\right]$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, toute courbe plane Γ paramétrée par $\left[\begin{array}{ccc} \varphi : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \big(u(t), v(t)\big) \end{array}\right]$ avec $\varphi(\mathrm{I}) \subset \mathscr{U}$ (càd $\forall t \in \mathrm{I},\ \varphi(t) = \big(u(t), v(t)\big) \in \mathscr{U}$)

  permet de construire une courbe $\mathscr{C}$ tracée sur S paramétrée par $\left[\begin{array}{ccc} f \circ \varphi : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & f\big(u(t), v(t)\big) \end{array}\right]$

  On note alors parfois $\mathscr{C} = f(\Gamma)$

Définitions : Courbes coordonnées d'une surface paramétrée

Soit S une surface paramétrée par $\left[\begin{array}{ccc} f : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \end{array}\right]$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$
on appelle courbes coordonnées à S au point $\mathrm{M}_0(u_0, v_0)$ de S les deux courbes suivantes tracées sur S

C_{u_0} paramétrée par $[v \mapsto f(u_0, v)]$ et Γ_{v_0} paramétrée par $[u \mapsto f(u, v_0)]$

On peut toujours visualiser une surface S comme la réunion de ses courbes coordonnées d'un même type :

$$\mathrm{S} = \bigcup_{u_0 \in \mathrm{I}} \mathrm{C}_{u_0} = \bigcup_{v_0 \in \mathrm{J}} \Gamma_{v_0} \text{ où I et J sont à déterminer en fonction de } \mathscr{U}$$

EXEMPLE

- Démontrer que l'hélice $\mathscr{H} : \begin{cases} x(t) = \mathrm{R}\cos t \\ y(t) = \mathrm{R}\sin t \\ z(t) = ht \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$ est tracée sur le cylindre $\mathscr{C}$ d'équation $\mathscr{C} :\ x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$

- Décrire les courbes coordonnées de la surface S : $\begin{cases} x(s,t) = s \\ y(s,t) = ts \\ z(s,t) = t^2 + s \end{cases},\ (t, s) \in \mathbb{R}^2$

V) Plan tangent à une surface

V-1) Point régulier et surface régulière

Définition : Point régulier d'une surface de classe C^1

On considère une surface S qui est définie

- par une équation cartésienne $f(x,y,z)=0$ avec $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\right]$ de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$.

  On dit que le point $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ de S est régulier si $\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)\neq\vec{0}$ soit $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(M_0),\dfrac{\partial f}{\partial y}(M_0),\dfrac{\partial f}{\partial z}(M_0)\right)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$.

- par un paramétrage $\left[\begin{array}{ccc}\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (u,v) & \mapsto & M(u,v)\end{array}\right]$ de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$.

  On dit que le point $M_0(u_0,v_0)$ est régulier si $\left(\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ est libre

  autrement dit cela signifie les deux vecteurs ne sont pas colinéaires

  ou encore que : $\vec{n}_{M_0}=\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)\neq\vec{0}$

  Les vecteurs $\left(\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ sont les vecteurs tangents en M_0 aux deux courbes coordonnées tracées sur S .

La surface S **est régulière** lorsque tous ses point sont réguliers.

V-2) Plan tangent

Définition : Plan tangent et normale en un point régulier d'une surface de classe C^1

On considère une surface S et un point M_0 régulier de S.

- Si S est donnée par une équation cartésienne $f(x,y,z)=0$ avec $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\right]$ C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$,

  alors le plan tangent à S en M_0 est le plan qui passe en M_0 et qui est normal à $\vec{n}_{M_0}=\overrightarrow{\text{grad}}f(M_0)$

- Si S est donnée par un paramétrage $\left[\begin{array}{ccc}\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3\\ (u,v) & \mapsto & M(u,v)\end{array}\right]$ C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$,

  alors le plan tangent à S en M_0 est le plan qui passe en M_0 et qui est normal à $\vec{n}_{M_0}=\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0)\wedge\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)$

  Dans ce cas, $\left(\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ est une base du plan tangent Π_0 soit :

  $\Pi_0=M_0+\text{Vect}\left(\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ qui permet d'obtenir une représentation paramétrique de Π_0

  et :$M(x,y,z)\in\Pi_0\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{M_0M},\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0,v_0),\dfrac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0,v_0)\right)=0$ donnant une représentation cartésienne de Π_0

Dans les deux cas :

$\vec{n}_{M_0}$ est un vecteur normal à S en M_0 et que la droite $\mathscr{D}_0=M_0+\text{Vect}\left(\vec{n}_{M_0}\right)$ est la normale à S en M_0

On obtient alors facilement une équation cartésienne du plan tangent Π_0 à S en M_0 :

$$M(x,y,z)\in\Pi_0\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}.\vec{n}_{M_0}=0$$

Ou bien $\vec{n}_{M_0}=(a,b,c)$ permet d'obtenir : Π_0 : $ax+by+cz=d$ avec $d=ax_0+by_0+cz_0$ puisque $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Pi_0$

Les points réguliers M_0 sont ceux où on peut définir un plan tangent parce qu'on obtient leur direction à l'aide du vecteur normal $\vec{n}_{M_0}$

Définition Droite normale et vecteur normal en un point régulier d'une surface

Lorsque M_0 est un point régulier d'une surface S,
la droite perpendiculaire en M_0 au plan tangent à S en M_0 est la droite normale à S en M_0.
Tout vecteur directeur de cette droite normale est un vecteur normal à S en M_0.

Attention à adapter la notion de point régulier à l'objet étudié (courbe/surface) ainsi qu'à la représentation utilisée (paramétrique/cartésienne) : ces définitions sont des grands classiques des questions de cours à l'écrit comme à l'oral!

EXEMPLES

• Pour toute fonction $\left[g : \mathscr{U} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\right]$ de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ et pour $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{U}$, alors le vecteur $\overrightarrow{grad}\, g(M_0)$, s'il est non nul, est un vecteur orthogonal à la surface de niveau S_λ : $g(x, y, z) = \lambda$ et il est orienté dans le sens des valeurs croissante de λ.

• On considère toujours la surface $S : \begin{cases} x(s,t) = s \\ y(s,t) = ts \\ z(s,t) = t^2 + s \end{cases}, (t,s) \in \mathbb{R}^2$

1. Y-a-t-il des points qui ne sont pas réguliers sur S ?

2. Donner une équation cartésienne du plan tangent au point de paramètres $(t, s) = (1, 1)$ de S

3. On considère la surface Σ donné par l'équation cartésienne $\Sigma : zx^2 = y^2 + x^3$.
Prouver que $S \subset \Sigma$. Y-a-t-il égalité? Préciser le plan tangent à Σ au point $M = (1, 1, 2)$.

V-3) Plans tangents et courbes tracées sur des surfaces

Proposition : Plan tangent et tangentes aux courbes régulières tracées sur S

Si Γ est une courbe tracée sur la surface Σ, et si M est un point régulier à la fois de Σ et de Γ, alors la tangente en M à Γ est incluse dans le plan tangent en M à Σ

Définition : Point régulier et tangente en un point d'une courbe définie par un système d'équations cartésiennes

• Étant donné f et g des applications de classe C^1 sur l'ouvert $\mathscr{U} \subset \mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'intersection des deux surfaces données par des équations cartésienne S : $f(x, y, z) = 0$ et Σ : $g(x, y, z) = 0$ définie une courbe $\mathscr{C} = S \cap \Sigma$ décrite par un système d'équations cartésiennes $\mathscr{C} : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$
Réciproquement, on peut toujours interpréter une courbe donnée par un système d'équation cartésienne comme l'intersection de deux surfaces d'équations données par les lignes du système.

• Un point M de la courbe $\mathscr{C}$ est régulier si les gradients $\overrightarrow{grad}\, f(M)$ et $\overrightarrow{grad}\, g(M)$ sont linéairement indépendants.

• La tangente en M à la courbe $\mathscr{C}$ est alors la droite $\Pi_f \cap \Pi_g$ où Π_f (resp. Π_g) est le plan tangent en M à S (resp Σ) : c'est la droite $M + \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{grad}\, f(M) \wedge \overrightarrow{grad}\, g(M)\right)$

EXEMPLE Soit $a > 0$ et Γ la courbe définie par $\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 - ax + y^2 = 0 \end{cases}$

1. Interpréter Γ comme une courbe située à l'intersection de deux surfaces qu'on identifiera.

2. Montrer que Γ est une courbe régulière.

3. Préciser un paramétrage de la tangente à Γ au point $A(a, 0, 0)$

VI) *Exemples de surfaces*

VI-1) *Surface d'équation* $z = f(x, y)$ *où* f *est une fonction de classe* C^1

On obtient, dans ce cas, facilement un paramétrage de la surface : $[f : (u, v) \mapsto M(u, v)]$ où : $M : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = g(u, v) \end{cases}$

Tout les points sont réguliers puisque :

On obtient ainsi une équation cartésienne du plan tangent Π_0 en M_0 :

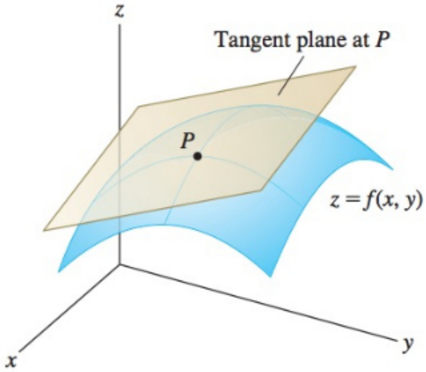
Supposons, de plus, que

- g soit de classe C^2 au voisinage de M_0
- M_0 est un point critique de g càd .

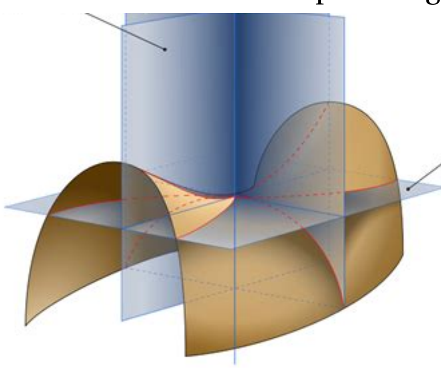
On souhaite alors étudier la position d'un point $M\big(x_0+h, y_0+k, g(x_0+h, y_0+k)\big)$ de S avec $(h, k) \to (0,0)$ par rapport au plan tangent Π_0. Avec la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 sur g, on a :

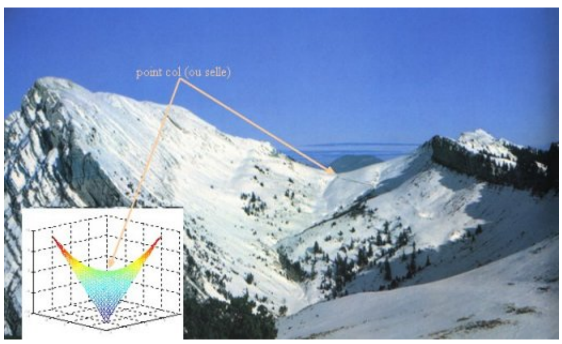
Ainsi, une discussion sur le signe des valeurs propres de la matrice hessienne H de g en M_0 (analogue à l'étude des extrema pour une fonction de 2 variables) permet de conclure :

- si $\det H > 0$ alors la surface reste du même côté du plan tangent (au dessus si $\mathrm{tr} H > 0$, en dessous si $\mathrm{tr} H < 0$)



- si $\det H < 0$ alors la surface traverse son plan tangent : c'est un point col





- si $\det H = 0$, on ne peut pas conclure avec uniquement l'étude de la matrice Hessienne.

VI-2) Surfaces réglées

Définition : Surface réglée, génératrice d'une surface réglée

Une surface S est réglée si elle est une réunion de droites qu'on appelle les génératrices de la surface réglée S.
$S = \bigcup_{t \in I} \mathscr{D}_t$ où $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ est une famille de droite avec I ensemble quelconque et $\mathscr{D}_t$ est une génératrice.

Exemples :

- Un plan dans l'espace est bien évidemment une surface réglée.

$\boxed{\text{Une surface réglée peut admettre plusieurs familles de génératrices}}$

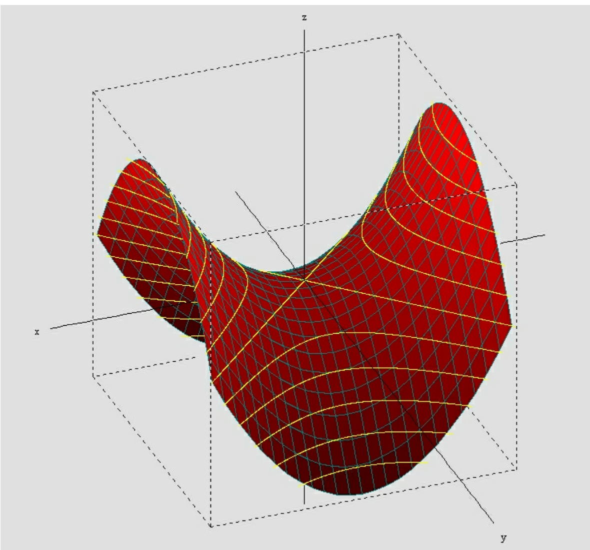
- Le cylindre $\mathscr{C}$ de révolution d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ est une surface réglée.

- On considère la famille de droites $\mathscr{D}_t = A_t + \text{Vect}(\vec{u}_t)$ où $t \in \mathbb{R}$, $A_t(t, 0, t^2)$ et $\vec{u}_t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

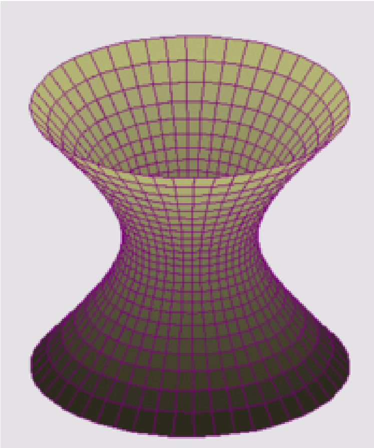
  Donner une équation cartésienne de la surface réglée engendrée par la famille $(\mathscr{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

  En examinant les sections planes avec des plans normaux aux axes, visualiser cette surface

C'est un PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.



- Un autre exemple classique de surface réglée est l'HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.



Méthode : Obtenir un paramétrage d'une surface réglée à partir de la famille des génératrice

Lorsqu'une surface réglée est décrite par une famille de génératrice $(\mathscr{D}_t)_{t\in \mathrm{I}}$, on peut obtenir un paramétrage de la surface de la façon suivante :

- on commence par chercher une représentation paramétrique de chacune des génératrices :

$$\mathscr{D}_t=\mathrm{A}(t)+\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}(t)) : \begin{cases} x = x_{\mathrm{A}}(t)+s x_{\overrightarrow{u}}(t) \\ y = y_{\mathrm{A}}(t)+s y_{\overrightarrow{u}}(t) \\ z = z_{\mathrm{A}}(t)+s z_{\overrightarrow{u}}(t) \end{cases} , s\in\mathbb{R}$$

- on obtient alors le paramétrage de S de la façon suivante :

$$\mathrm{M}(x,y,z)\in \mathrm{S}=\bigcup_{t\in \mathrm{I}}\mathscr{D}_t \Leftrightarrow \exists t\in \mathrm{I},\ \mathrm{M}(x,y,z)\in\mathscr{D}_t \Leftrightarrow \exists (t,s)\in \mathrm{I}\times\mathbb{R},\ \begin{cases} x = x_{\mathrm{A}}(t)+s x_{\overrightarrow{u}}(t) \\ y = y_{\mathrm{A}}(t)+s y_{\overrightarrow{u}}(t) \\ z = z_{\mathrm{A}}(t)+s z_{\overrightarrow{u}}(t) \end{cases}$$

Proposition : Plan tangent et surface réglée

Le plan tangent en un point régulier d'une surface réglée contient la génératrice passant par ce point.

VI-3) Surface de révolution

Définitions : Surface de révolution et vocabulaires associés

Une surface S est une surface de révolution si c'est une réunion de cercle de même axe.

Les cercles de mêmes axes sont les **parallèles** de la surface de révolution.

L'axe commun à tous les cercles est l'**axe** de la surface de révolution.

La section plane avec la surface de révolution avec un plan qui contient l'axe de révolution est une **méridienne** de la surface de révolution.

Méthode : Construction d'une surface générée par la rotation d'une courbe Γ autour d'un axe $\mathscr{D}$

Soit S la surface engendrée par la rotation de Γ autour de l'axe $\mathscr{D}$,

1. pour obtenir une représentation cartésienne de S

- on choisit un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de l'axe $\mathscr{D}$
- on remarque que :

  M $\in$ S si et seulement si il existe un point P de Γ tel que M et P sont sur un même cercle d'axe $\mathscr{D}$

  ce qu'on traduit par : $\mathrm{M} \in \mathrm{S} \Leftrightarrow \exists \mathrm{P} \in \Gamma, \begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{MP}}.\vec{u} = 0 & (i) \\ \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\| & (ii) \end{cases}$
- on trouve une équation cartésienne de S en éliminant les données introduites par l'introduction de P (coordonnées ou paramètre)

2. pour obtenir une représentation paramétrique de S lorsque $\mathscr{D}$ est l'un des axes du repère.

- on cherche une représentation paramétrique de la courbe Γ : $\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in \mathrm{I}$
- les points de S sont les images des points P de Γ par la rotation d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ aussi :

$$\text{si } \mathscr{D} = \mathrm{O} + \mathrm{Vect}(\vec{i}) : \quad \mathrm{M}(x,y,z) \in \mathrm{S} \Leftrightarrow \exists (t,\theta) \in \mathrm{I} \times [0,2\pi], \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

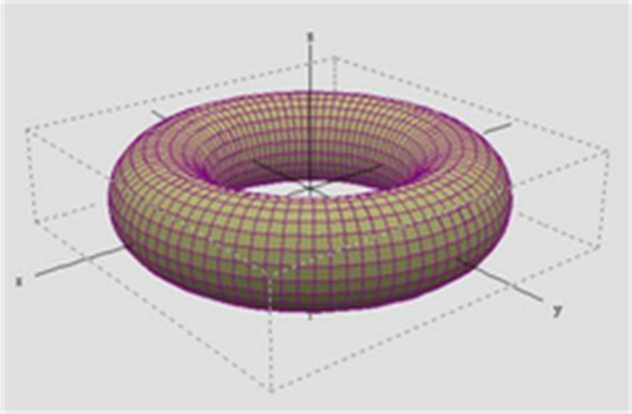
$$\text{si } \mathscr{D} = \mathrm{O} + \mathrm{Vect}(\vec{j}) : \quad \mathrm{M}(x,y,z) \in \mathrm{S} \Leftrightarrow \exists (t,\theta) \in \mathrm{I} \times [0,2\pi], \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{si } \mathscr{D} = \mathrm{O} + \mathrm{Vect}(\vec{k}) : \quad \mathrm{M}(x,y,z) \in \mathrm{S} \Leftrightarrow \exists (t,\theta) \in \mathrm{I} \times [0,2\pi], \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

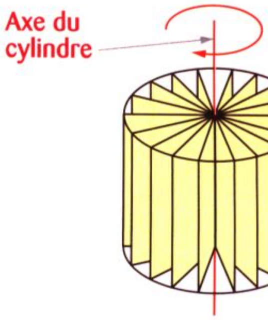
Attention! Une courbe quelconque tracée sur une surface de révolution que l'on fait tourner autour de l'axe n'est pas forcément une méridienne (c'est le cas des courbes non coplanaires avec l'axe).

Exemples classiques de surfaces de révolution

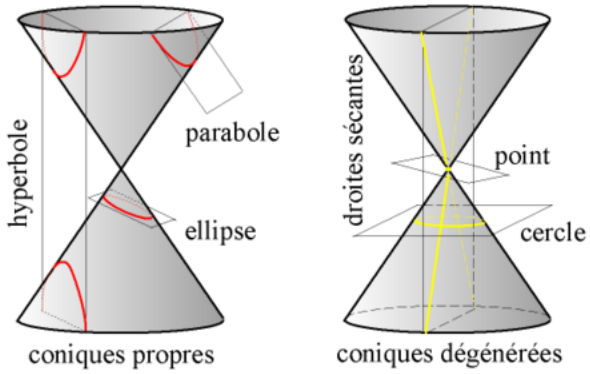
- LE TORE est obtenue par rotation d'un cercle autour d'un axe qui ne le coupe pas.



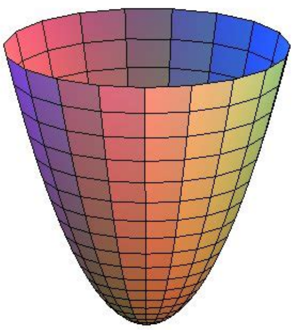
- le CYLINDRE DE RÉVOLUTION est obtenu par rotation



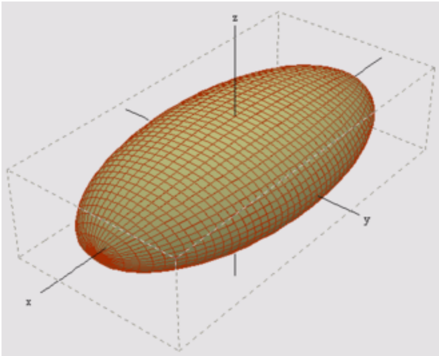
- le CÔNE DE RÉVOLUTION est obtenu par rotation d'une droite autour d'un axe sécant à cette droite



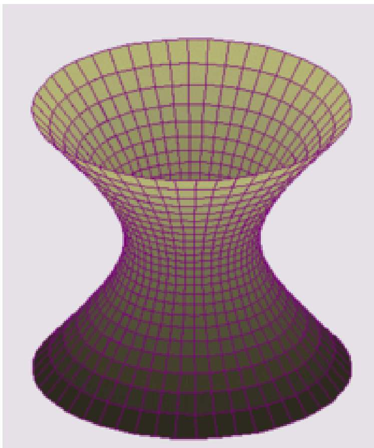
- le PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION est obtenu par rotation



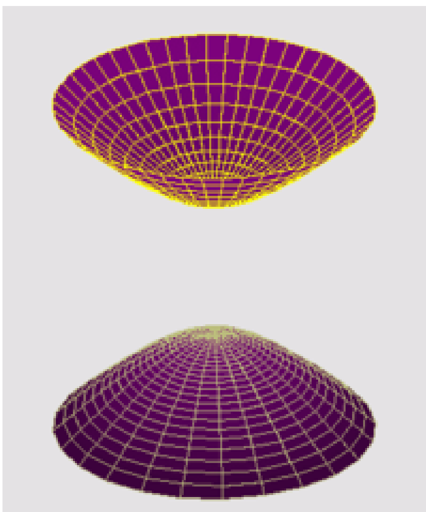
- l'ELLIPSOÏDE d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ devient un ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION lorsque $a=b$: il est obtenu par rotation de l'ellipse $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ x=0\end{array}\right.$ autour de l'axe $\mathrm{O}+\mathrm{Vect}(\overrightarrow{\imath})$.



- l'HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION À UNE NAPPE d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ est une surface de révolution obtenu par rotation



- l'HYPERBOLOÏDE À DEUX NAPPES d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ devient de révolution lorsque $a=b$: elle est obtenue par rotation d'une hyperbole autour de l'axe de symétrie qui la coupe en ses sommets.



EXEMPLE N° 3 On donne, dans le repère orthonormée $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, les surfaces

$$S:\begin{cases} x=v^2\sin u\\ y=v^2\cos u\\ z=v\end{cases},(u,v)\in\mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \Sigma:\ 4x^2+y^2+z^2=1$$

1. Montrer que ces deux surfaces sont de révolution. Donner l'axe et décrire les parallèles.

Méthode:

- Si la surface est donnée par une représentation paramétrique, on examine les familles de courbes coordonnées en espérant trouver une famille de cercles de même axe
- Si la surface est donnée par une représentation cartésienne, on examine des sections planes en espérant trouver, dans un cas, des cercles de même axe

2. Déterminer une équation cartésienne de S pour préciser les méridiennes.

EXEMPLE N° 4 Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, S est la surface de révolution obtenue par la rotation autour de l'axe $\mathscr{D}=O+\text{Vect}(\vec{k})$ de la courbe $\Gamma:\begin{cases} x(t)=\cos t\\ y(t)=\sin t\\ z(t)=\cos(2t)\end{cases},t\in[0,2\pi[$

1. donner une représentation paramétrique de S

2. donner une représentation cartésienne de S et reconnaître S.