# CHAPITRE XIII: INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on s'intéresse à l'étude d'intégrale du type

$$\mathrm{F}(x)=\int_{\mathrm{J}} f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où} \quad \text{où} \left\{\begin{array}{l} x \text{ est le paramètre } (x\in\mathbb{R}) \\ t \text{ est la variable in tégrée} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad f(x,t)\in\mathbb{K} \quad \text{où } t\in \mathrm{J} \text{ qui est un intervalle de } \mathbb{R}$$

EXEMPLE N$^{\mathrm{O}}$ 1

**I.** Préciser, dans chaque cas, le paramètre d'une part, la variable et l'intervalle d'intégration d'autre part.

**1.** $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,\mathrm{d}t$ où $x\geqslant 0$ alors et $f$ d'expression :

**2.** $\mathrm{G}(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t$ où $x\geqslant 0$ alors et $f$ d'expression :

**3.** $\mathrm{H}(a)=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x+a}\,\mathrm{d}x$ où $a\geqslant 0$ alors et $f$ d'expression :

**4.** Si φ est continue sur $]0,+\infty[$, la transformée de Laplace de φ a pour expression
$\mathrm{L}_{\varphi}(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ où $x\in\mathbb{R}$ alors et $f$ d'expression :

L'objectif est d'apprendre à étudier la régularité de ces fonctions :

- déterminer le domaine de définition c'est à dire les paramètres $x$ pour lesquels $\mathrm{F}(x)$ existe
- étudier la continuité de F selon ce paramètre $x$
- étudier la dérivabilité de F selon ce paramètre $x$ et le calcul de la dérivée

**Attention!** Ne pas confondre la notion d'intégrale à paramètre $\displaystyle\int_{\mathrm{J}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$

avec la notion d'intégrale dépendant de ses bornes $\displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ (rencontrée en PTSI)

Une intégrale dépendant de ses bornes se traite en introduisant judicieusement des primitives.

EXEMPLE N$^{\mathrm{O}}$ 0 : Justifier que les applications suivantes sont dérivables et calculer la dérivée lorsque c'est possible

$$\mathrm{F}_1(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_2(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

## I) *Définition*

Il s'agit, à $x$ fixé dans $\mathbb{R}$, d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_{\mathrm{J}} f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Il s'agit donc :

- étudier la continuité de $[t\mapsto f(x,t)]$ (à $x$ fixé) sur l'intervalle J pour identifier les problèmes de convergence.
  Remarque : Si J est un segment, la continuité de $[t\mapsto f(x,t)]$ (à $x$ fixé) suffit pour justifier la convergence de $\mathrm{F}(x)$.
- étudier le signe de $f(x,t)$ au voisinage de ces problèmes ce qui, s'il n'est pas de signe constant, conduit à envisager l'étude de l'intégrabilité de $f$ (autrement dit la convergence de $\displaystyle\int_{\mathrm{J}} |f(x,t)|\,\mathrm{d}t$
- utiliser les théorèmes de comparaison, le critère d'équivalence ou le théorème de domination pour utiliser les intégrales de référence afin de préciser la nature de l'intégrale.

SUITE EXEMPLE N$^{\mathrm{O}}$ 1

**II.** Donner le domaine de définition des fonctions F, G, H, $\mathrm{L}_v$ et $\mathrm{L}_w$ où $v(t)=\ln t$ et $w(t)=t\ln t$

## *II) Continuité*

Il arrive souvent que le sujet "zappe" l'étude du domaine de définition pour demander directement de justifier la continuité de l'intégrale à paramètre sur un intervalle I qu'il précise. On utilise alors directement le théorème suivant dont la démonstration est admise.

**Théorème : Continuité d'une intégrale à paramètre**

Soit A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et $[f : A \times I \to \mathbb{K}]$,

la fonction $\left[F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt\right]$ est continue sur l'intervalle A lorsque

i. pour tout $x \in A$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur I

ii. pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est continue sur A

iii. il existe une fonction $\varphi$ ( positive, continue et ) intégrable sur I telle que : $\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ *(hypothèse de domination)*

Remarques :

- i. et ii. peuvent s'obtenir trivialement à partir de « $f$ est $C^0$ sur $A \times I$ » ($f$ étant une fonction de deux variables)
- Ce théorème est un théorème qui permet d'intervertir un symbole lim avec un symbole $\int_I$. En effet :

  F est continue en $x_0 \in A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \int_I f(x,t)\,dt = \int_I f(x_0,t)\,dt = \int_I \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x,t)\right) dt$
- Il faut bien "comprendre l'utilité des hypothèses" :

  i. et iii. assure la définition de $F(x)$ pour $x$ dans A car, avec le théorème de comparaison, on justifie l'intégrabilité de $[t \mapsto f(x,t)]$ et la continuité en $x$ ne pourrait pas être obtenue sans avoir la continuité partielle de $f$ en $x$ aussi ii. est absolument nécessaire

  **Attention ! Sans l'hypothèse de domination, le résultat est faux**

  EXEMPLE N° 2 Étudier la continuité de $\left[F : x \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt}\,dt\right]$ sur $[0,+\infty[$

- **La continuité est une propriété locale** aussi, dans des cas où la domination sur I n'est pas possible, le sujet peut (doit d'après le programme) vous proposer de justifier la continuité en utilisant une domination locale.

  Il s'agit de travailler d'abord sur un domaine $A_a$ où la domination est possible avec $A = \bigcup\limits_{a \in A} A_a$.

  Par exemples : $[0,+\infty[ = \bigcup\limits_{A>0} [0,A]$, $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{A>0} [-A,A]$, $]0,+\infty[ = \bigcup\limits_{0<a<A} [a,A]$ ou $]-1,2[ = \bigcup\limits_{\varepsilon \in ]0,1[} [-1+\varepsilon, 2-\varepsilon]$
- Le programme ne propose plus de corollaire pour simplifier les hypothèses dans le cas particulier où $I = [a,b]$.

SUITE EXEMPLE 1

**III. a)** Étudier la continuité de F sur $[0,+\infty[$ (on pourra d'abord dominer sur $[0,A]$ avec $0 < A$). En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$

**III. b)** Étudier la continuité de H sur $]0,+\infty[$ (on pourra d'abord dominer sur $[\varepsilon, A]$ avec $0 < \varepsilon < A$)

## III) Dérivation

L'étude de la dérivabilité est l'étape logique qui suit l'étude de la continuité. Le plus souvent, l'idée est soit de déterminer explicitement $F(x)$ en obtenant une équation différentielle qu'on pourra résoudre, soit d'étudier les variations de F en étudiant le signe de sa dérivée.
Il arrive que le sujet « zappe » l'étude du domaine de définition et l'étude de la continuité pour demander directement de justifier la dérivabilité sur un intervalle J qu'il précise. Dans tous les cas, il s'agit d'utiliser le théorème suivant qu'on admet :

**Théorème : Dérivation d'une intégrale à paramètre**

Soit A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et $[f : A \times I \to \mathbb{K}]$,

la fonction $\left[F : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt\right]$ est de classe $C^1$ sur l'intervalle A lorsque

i. pour tout $x \in A$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur I

ii. pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x,t)]$ est de classe $C^1$ sur A

iii. pour tout $x \in A$, la fonction $\left[t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$ est continue sur I

iv. il existe une fonction $\varphi$ intégrable sur I telle que : $\forall (x,t) \in A \times I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$

*(hypothèse de domination)*

De plus, on a alors : $\forall x \in A$, $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$

Remarques :

- On appelle parfois ce théorème « Théorème de Leibniz » mais, pour évitez toute confusion avec « la formule de Leibniz », je préfère, conformément au programme, qu'on utilise « théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre »

  Formule de Leibniz :

- la continuité nécessaire pour i et les propositions ii. et iii. s'obtiennent à partir de « $f$ est de classe $C^1$ sur $A \times I$ »
  ($f$ étant une fonction de deux variables)
- Ce théorème est un théorème qui permet d'intervertir un symbole $\dfrac{d}{dx}$ avec un symbole $\displaystyle\int_I$. En effet :
$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_I f(x,t)\,dt\right) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$
- Il faut bien « comprendre l'utilité des hypothèses » :
  - L'hypothèse i. assure la définition de F sur A
  - Par le théorème de continuité, ii., iii. et iv. assure la définition et la continuité de $\left[x \mapsto \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\right]$
  - L'hypothèse de domination porte uniquement sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et elle suffit à assurer la continuité de F sous réserve de la continuité de $[x \mapsto f(x,t)]$ assurée par ii (et sans domination de $f(x,t)$ !)
  - On obtient non seulement la dérivabilité de F sur I mais aussi que $F' = \left[x \mapsto \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\right]$ (d'où le caractère $C^1$ puisque cette application est continue)
- On rappelle que : $i. \Leftrightarrow$ pour tout $x \in A$, la fonction $[t \mapsto f(x,t)]$ est continue sur I et $\displaystyle\int_I |f(x,t)|\,dt$ est convergente

  On remarquera que cela est vérifié sous les hypothèses i) et iii) du théorème de continuité.
- Comme la continuité, **la dérivabilité est une propriété locale** aussi, si la domination n'est pas possible sur la totalité de I, le sujet peut (doit) vous proposer d'utiliser une domination locale.
- Le programme ne propose plus de corollaire pour simplifier les hypothèses dans le cas où $I = [a,b]$

SUITE EXEMPLE 1

**IV.a)** Démontrer que H est de classe $C^1$ sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon >$ et calculer $H'(a)$ sans le symbole intégral.
Déterminer alors l'expression de $H(a) + H(\frac{1}{a})$ sans symbole intégral en faisant intervenir la constante $H(1)$.

**IV.b)** Vérifier que $L_v$ est de classe $C^1$ sur $]0, +\infty[$ (on pourra dominer sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$)
Montrer que $xL_v'(x) = -\dfrac{1}{x} - L_v(x)$ pour $x > 0$ puis en déduire $L_v(x)$ en fonction de la constante $L_v(1)$.

## *IV) Classe* $C^n$ *où* $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Il n'y a pas de théorème directement au programme mais il suffit, bien souvent, d'itérer le théorème de dérivation quitte à mener un raisonnement par récurrence.

SUITE EXEMPLE 1 V) **Question 4 du sujet Maths C de 2017**

a) Soit A un réel strictement positif. Montrer que, pour tout réel strictement positif $t$, et tout réel $x$ de $[0, A]$ :

$$|e^{-t}t^x| \leqslant (1 + t^A)e^{-t}$$

b) Montrer que G est continue sur $[0, A]$.

c) Montrer que G est de classe $C^\infty$ sur $[0, A]$.

d) En déduire que la fonction G est de classe $C^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer, pour tout entier naturel $n$ et pour tout $x \geqslant 0$, $G^{(n)}(x)$ sous forme d'une intégrale.