**Consigne** : Travailler en classe inversée le chapitre.

CONSEILS MÉTHODOLOGIQUES POUR TRAVAILLER EN CLASSE INVERSÉE

1. Munissez vous du poly, d'un papier, d'un crayon et de surligneurs. L'idée est d'accompagner votre lecture par l'écrit et par de la mise en évidence en couleurs des points importants.
2. Les exemples ont vocation à être chercher d'abord seul avant de consulter la correction.
3. N'hésitez pas à m'envoyer des questions par mail auxquelles j'essaierai de répondre le plus vite possible.
4. Je vous propose d'étaler le travail en plusieurs séances.
   Les deux première séances consistent en un travail de révision du programme de PTSI où j'insiste sur la rédaction des raisonnements où il faut être rigoureux.

   Séance n° 1 Rappels de PTSI : vocabulaire de base, formules des probabilités totales et composée
   Du début à l'exemple 1 inclus (pages 1 à 7) *(Environ 2h)*

   Séance n° 2 Rappels de PTSI : indépendance
   Suite de la partie I (après l'exemple 1) jusqu'à l'exemple 4 inclus (pages 7 à 10) *(Environ 2h)*
   Vous pouvez réfléchir sur les exercices 0,1 et 2 de la feuille d'exercices
   Dans les séances suivantes, on aborde le programme de PT : la première séance ne doit pas vous décourager même si elle est plus théorique...

   Séance n° 3 Ensemble dénombrable/ Tribu des événements d'un univers dénombrable (pages 11 à 14) *(Environ 2h)*
   Ce qu'on attend de vous dans le programme c'est surtout de pourvoir manipuler des familles d'événements dans un univers dénombrables : il faut donc bien travailler l'exemple 5.

   Séance n° 4 Calculs dans un espace probabilisé (pages 15 à 18) *(Environ 2h)*
   Il faut bien travailler les exemples 6 et 7 !

   Séance n° 5 Généralisation des formules de probabilités (pages 19 à 21) *(Environ 1h30)*
   Vous pouvez réfléchir sur les exercices 3 et 5 de la feuille d'exercices

Nous ne travaillerons à la rentrée que sur des TD qui travailleront les définitions et les méthodes introduites dans ce cours. Vous devez donc absolument être au point sur ce celui-ci pour que les TD soient efficaces.

CHAPITRE XII: ESPACES PROBABILISÉS

## I) Probabilité sur un ensemble fini (Rappels PTSI)

Pour faire des probabilités, il faut commencer par se mettre d'accord sur un vocabulaire, indépendant de la nature des expériences aléatoires et qui permettra de formaliser le raisonnement.
• L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers** $\Omega$ et un résultat est une **issue**.
En PTSI, l'univers $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ associée à l'expérience aléatoire est un ensemble fini ($n \in \mathbb{N}^*$ est fixé).
Par exemple, si l'expérience est « résultat du lancer un dé classique équilibré », alors $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si l'expérience est « couleur d'une boule tirée dans une urne contenant des boules noires et blanches », $\Omega = \{\text{noire}, \text{blanche}\}$. Si l'expérience est « nature d'une carte tirée dans un jeu de 32 cartes », alors $\Omega$ contient les 32 types de cartes possibles (valet de coeur, 10 de pique, etc...)

- Les **événements** sont des parties de $\Omega$ càd un ensemble A avec $A \subset \Omega \Leftrightarrow A \in \mathscr{P}(\Omega)$)

  Les **événements élémentaires** sont les $n$ événements $\{x_i\}$ à un seul élément.

  Concrètement, ils sont, en général, décrit par une propriété plutôt que par une énumération. Par exemple, l'événement A :« le résultat est pair » pour le lancé de dé est $A = \{2, 4, 6\}$. Pour le tirage d'une carte dans un jeu de 32 cartes, l'événement « la carte est un pique » contient 8 éléments alors que « la carte est un as » en contient 4.

  L'ensemble des événements sur $\Omega$ est l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de $\Omega$ et on démontre que $\text{Card}\mathscr{P}(\Omega) = 2^n$

  Par récurrence sur $n$ : $HR_n$ « Si $\text{Card}(\Omega) = n$ alors $\text{Card}\mathscr{P}(\Omega) = 2^n$ »

  Initialisation : Si $n = 0$ alors $\mathscr{P}(\Omega) = \{\emptyset\}$ d'où $1 = 2^0$ élément

  Hérédité : On suppose $HR_n$ vraie et on prouve que $HR_{n+1}$ l'est aussi. On se donne donc $\Omega$ avec $\text{Card}(\Omega) = n+1$
  Comme $n + 1 \geqslant 1$, il y a au moins un élément $x$ dans $\Omega$.
  On partitionne $\mathscr{P}(\Omega)$ en deux : les parties qui contiennent $x$ et celles qui ne contiennent pas $x$.
  Les parties qui ne contiennent pas $x$ sont des parties de $\Omega - \{x\}$ de cardinal $n$ donc $HR_n$ s'applique et il y a $2^n$ parties de $\Omega$ qui ne contiennent pas $x$.
  Les parties qui contiennent $x$ sont des réunions d'une partie de $\Omega - \{x\}$ avec $\{x\}$ donc il y en a autant que des parties qui ne contiennent pas $x$ soit $2^n$.
  Au final, il y a $2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ parties de $\Omega$ lorsque $\text{Card}(\Omega) = n + 1$

- Une **probabilité sur l'univers fini** $\Omega$ est une application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifiant

  **1.** $P(\Omega) =$ 1 *On dit que $\Omega$ est un événement certain*

  **2.** Si **les événements** A **et** B **sont incompatibles** i.e. $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

  On dit alors que $(\Omega, P)$ est un **espace probabilisé fini**

  On démontre (les preuves ont été faite l'an derniers) que :

  ▷ Pour tout événement A, $P(\overline{A}) =$ 1-P(A) et, en particulier : $P(\emptyset) =$ 0 *On parle d'événement impossible*

  ▷ Pour tous événements A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et : $A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)$

  ▷ Pour **définir une probabilité** P **sur** $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$, il suffit de la définir sur les événements élémentaires soit de donner les $n$ réels $p_i = P(\{x_i\})$ avec $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$

  **Attention** à bien distinguer ce qu'il faut vérifier pour avoir une probabilité (à savoir 1. et 2.) de ce qu'on déduit du fait d'avoir une probabilité (événement contrairement, probabilité d'une réunion, calcul de la probabilité à partir des événements élémentaires). J'attire aussi votre attention sur la notion « A et B sont incompatibles » qui signifie que les événements A et B ne peuvent pas se produire en même temps.

- Il y a une **situation d'équiprobabilité** dans l'espace $(\Omega, \mathrm{P})$ où $\Omega = \{x_1, \dots, x_n\}$ lorsque : $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{P}(\{x_i\}) = \dfrac{1}{n}}$

  Dans ce cas, pour tout événement A, on a : $\mathrm{P(A)} = \boxed{\dfrac{\mathrm{Card(A)}}{\mathrm{Card}(\Omega)}}$ vulgarisé par $\dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb total de cas}}$

  Il s'agit également de faire des lien entre différents événements : en particulier, une question pertinente est de savoir si, lorsqu'on sait qu'un événement est réalisé, est-ce qu'on a amélioré l'information concernant la réalisation de l'autre événement. C'est l'objet de ce qu'on appelle le conditionnement.

- Si B est un événement avec $\mathrm{P(B)} > 0$ alors la **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B vaut :

$$\boxed{\mathrm{P_B(A)} = \mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}}$$

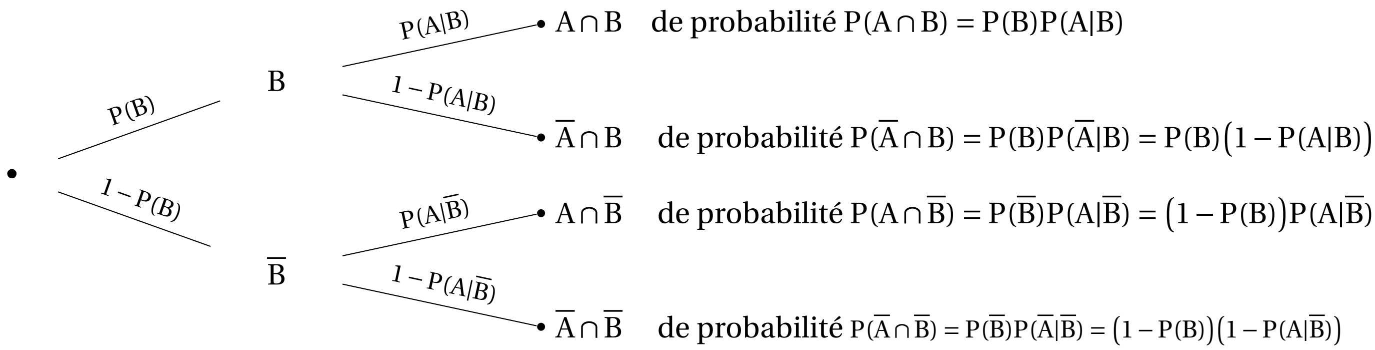
La probabilité conditionnelle hérite des propriétés de la probabilité : en particulier $\mathrm{P(\overline{A}|B)} = 1 - \mathrm{P(A|B)}$

$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P(B \cap \Omega)} = \mathrm{P}\big(\mathrm{B} \cap (\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}})\big) = \mathrm{P}\big((\mathrm{B} \cap \mathrm{A}) \cup (\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}})\big) = \mathrm{P(B \cap A)} + \mathrm{P(B \cap \overline{A})}$ puisque $\mathrm{B \cap A}$ et $\mathrm{B \cap \overline{A}}$ sont incompatibles
En divisant alors par $\mathrm{P(B)}$, on a bien : $1 = \mathrm{P(A|B)} + \mathrm{P(\overline{A}|B)}$

On déduit la **formule des probabilités composées** : Si A et B sont des événements avec $\mathrm{P(A)} > 0$ et $\mathrm{P(B)} > 0$

$$\mathrm{P(A \cap B)} = \boxed{\mathrm{P(A)} \times \mathrm{P(B|A)} = \mathrm{P(B)} \times \mathrm{P(A|B)}}$$

On représente, en général, la situation à l'aide d'un arbre pondéré :




Sur les branches de la première partie de l'arbre, on écrit la pondération : l'événement B est réalisé avec une probabilité $\mathrm{P(B)}$ et l'événement $\overline{\mathrm{B}}$ avec une probabilité $\mathrm{P(\overline{B})} = 1 - \mathrm{P(B)}$.
Sur les branches de la deuxième partie, une partie de l'aléa a été levé : l'un des événements B ou $\overline{\mathrm{B}}$ a été réalisé.
Les probabilités deviennent conditionnelles : la réalisation de $\mathrm{A \cap B}$ s'obtient par la réalisation de A sachant que B est réalisé d'où la pondération par $\mathrm{P(A|B)}$.
La formule des probabilités composées se lit au bout de chacune des branches.

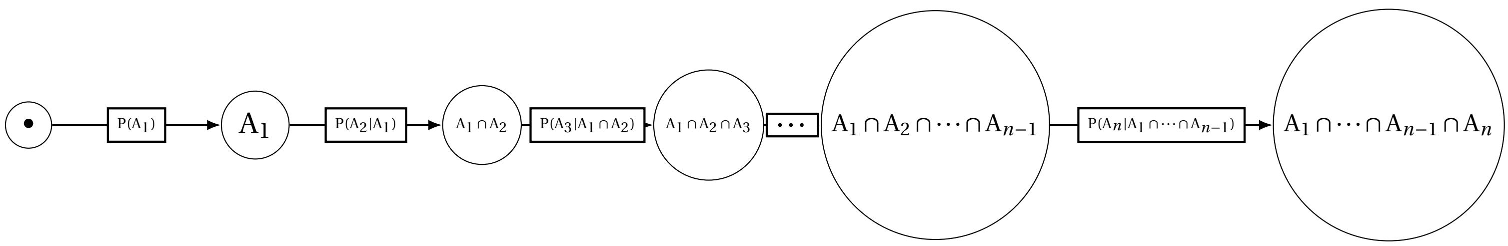
Généralisons à une succession de $n$ événements :

**Théorème Formule des probabilités composées :**

Si $(\mathrm{A}_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est une famille d'événements avec $\mathrm{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p)} \neq 0$ alors

$$\mathrm{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p)} = \mathrm{P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

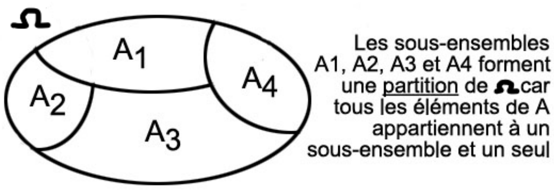
En effet, en parcourant la branche conduisant de la racine à la feuille contenant l'événement $\mathrm{A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n}$, on a :




$$\begin{aligned}
\mathrm{P(A_1 \cap \dots A_n)} &= \mathrm{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \times P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} \\
&= \mathrm{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \times P(A_{n-1}|A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \times P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} \quad \text{en itérant} \\
&= \dots = \mathrm{P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})} \quad \text{en itérant de la feuille à la racine}
\end{aligned}$$

- $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ **est un système complet d'événements** ($p \in \mathbb{N}^*$ fixé) (ou que$(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ **est une partition de** $\Omega$) si :
  - ▹ les événements sont 2 à 2 incompatibles : $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset}$
  - ▹ leur réunion vaut l'univers en entier : $\boxed{\bigcup_{i=1}^{p} A_i = \Omega}$

  Cela correspond à un découpage de l'ensemble $\Omega$ en sous-ensemble disjoints dont la réunion est $\Omega$.

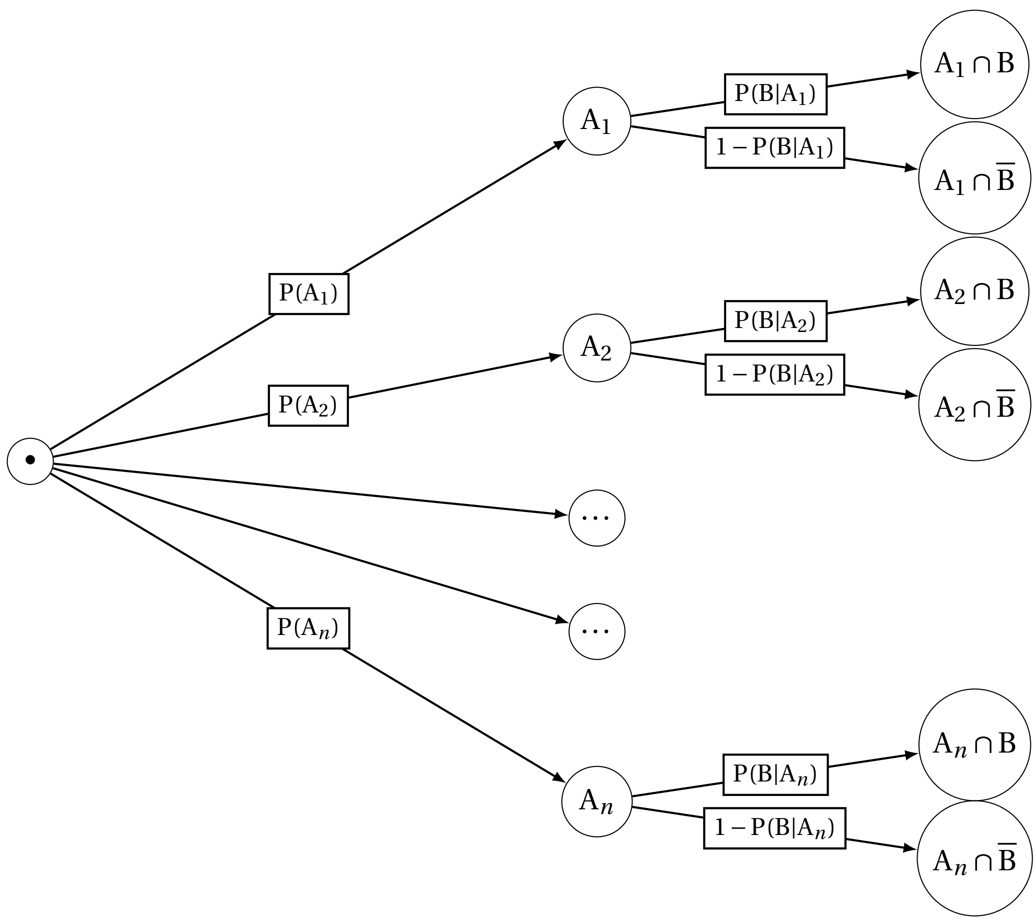



La justification d'un système complet d'événements est liée à la nature des événements et pas aux probabilités.

$\boxed{\text{Pour tout événement A, le système } \{A, \overline{A}\} \text{ est un système complet d'événements}}$ souvent bien utile...

Exemple : Dans l'expérience aléatoire consistant à tirer une carte dans un jeu de 32 cartes. Les événements
A :« la carte tirée est rouge », B : « la carte tirée est un trèfle » et C :« la carte tirée est un pique »
forment un système $\{A, B, C\}$ complet d'événements pour cette expérience. En effet :
- $A \cap B = \emptyset$ et $A \cap C = \emptyset$ puisqu'une carte rouge ne peut pas être un trèfle ou un pique
- $B \cap C = \emptyset$ puisqu'une carte ne peut pas être en même temps un trèfle et un pique
- $A \cup B \cup C = \Omega$ puisque la carte tirée est soit rouge (donc dans A), soit noire et, dans ce cas, c'est soit un trèfle (donc dans B) soit un pique (donc dans C)

- **Formule des probabilités totales** :
  Soit $(A_i)_{i\in[\![1,b]\!]}$ est un système complet d'événements($n \in \mathbb{N}^*$ fixé) avec des événements tous de probabilités non nulles ($P(A_i) > 0$ pour $i \in [\![1,n]\!]$) alors ,pour tout événement B, on peut dresser l'arbre pondéré suivant



On peut obtenir l'événement B en réalisant soit $A_1 \cap B$, soit $A_2 \cap B, \dots$, soit $A_n \cap B$ autrement dit $B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$.

Les différents événements $\left(B \cap A_i\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ sont deux à deux incompatibles aussi : $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$

mais, par les probabilités composée : $P(B \cap A_i) = P(A_i) \times P(B|A_i)$ donc $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B|A_i)$

Visuellement sur l'arbre pondéré, la réalisation de B s'obtient en empruntant l'une (et une seule possible) des branches conduisant aux événements $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$. Pour obtenir la probabilité de B, on somme la probabilité des différents événements où B se réalise et, le long de chacune des branches, on applique la formule des probabilités composées. Plus rigoureusement, il s'agit de mener un raisonnement « ensembliste » :

on sait que $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (car $\{A_1, \dots, A_n\}$ est un système complet d'événements) et puisque $B \subset \Omega$ alors $B = B \cap \Omega$

Mais alors : $B = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$ puis on poursuit comme avant le calcul en passant au probabilité

**Théorème Formule des probabilités totales :**

Si $(A_i)_{i \in [\![1,b]\!]}$ est un système complet d'événements($n \in \mathbb{N}^*$ fixé) avec des événements tous de probabilités non nulles ($P(A_i) > 0$ pour $i \in [\![1,n]\!]$) alors ,pour tout événement B, $P(B) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{p} P(A_i) \times P_{A_i}(B)}$

- **Formule de Bayes** (renversement du conditionnement)

  ▷ Si A et B sont des événements avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$ alors $P(B|A) = \boxed{\dfrac{P(B) \times P(A|B)}{P(A)}}$

  ▷ Si $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements ($n \in \mathbb{N}^*$ fixé) tous de probabilités non nulles

  pour tout événement B avec $P(B) > 0$ et $j \in [\![1,n]\!]$ : $P(A_j|B) = \boxed{\dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)} = \dfrac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}}$

Les deux relations sont immédiatement conséquences des formules précédentes :

- en utilisant $P(A \cap B) = P(A)P(A|B) = P(B)P(B|A)$ on a : $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B)P(A|B)}{P(A)}$

- la seconde formule consiste à utiliser la formule des probabilités composées $P(A_j \cap B) = P(A_j)P(B|A_j)$ au numérateur et la formule des probabilités totales au dénominateur avec le système complet $\{A_1, \dots, A_n\}$.

On dit qu'on renverse le conditionnement puisqu'il s'agit de calculer $P(A_j|B)$ à l'aide des $P(B|A_i)$ où $i \in [\![1,n]\!]$.

Mettons en pratique sur un exercice ces rappels. Cet exercice pourrait être résolu en terminale mais la rigueur que l'on va exiger sur la rédaction est bien différente...Vous devez justifiez les relations écrites entre les probabilités et aussi justifier les probabilités chiffrées données. Un arbre pondéré n'est pas une justification : c'est une aide comme une figure aide à justifier une démonstration en géométrie...

EXEMPLE N° 1 (D'après oral maths 2)

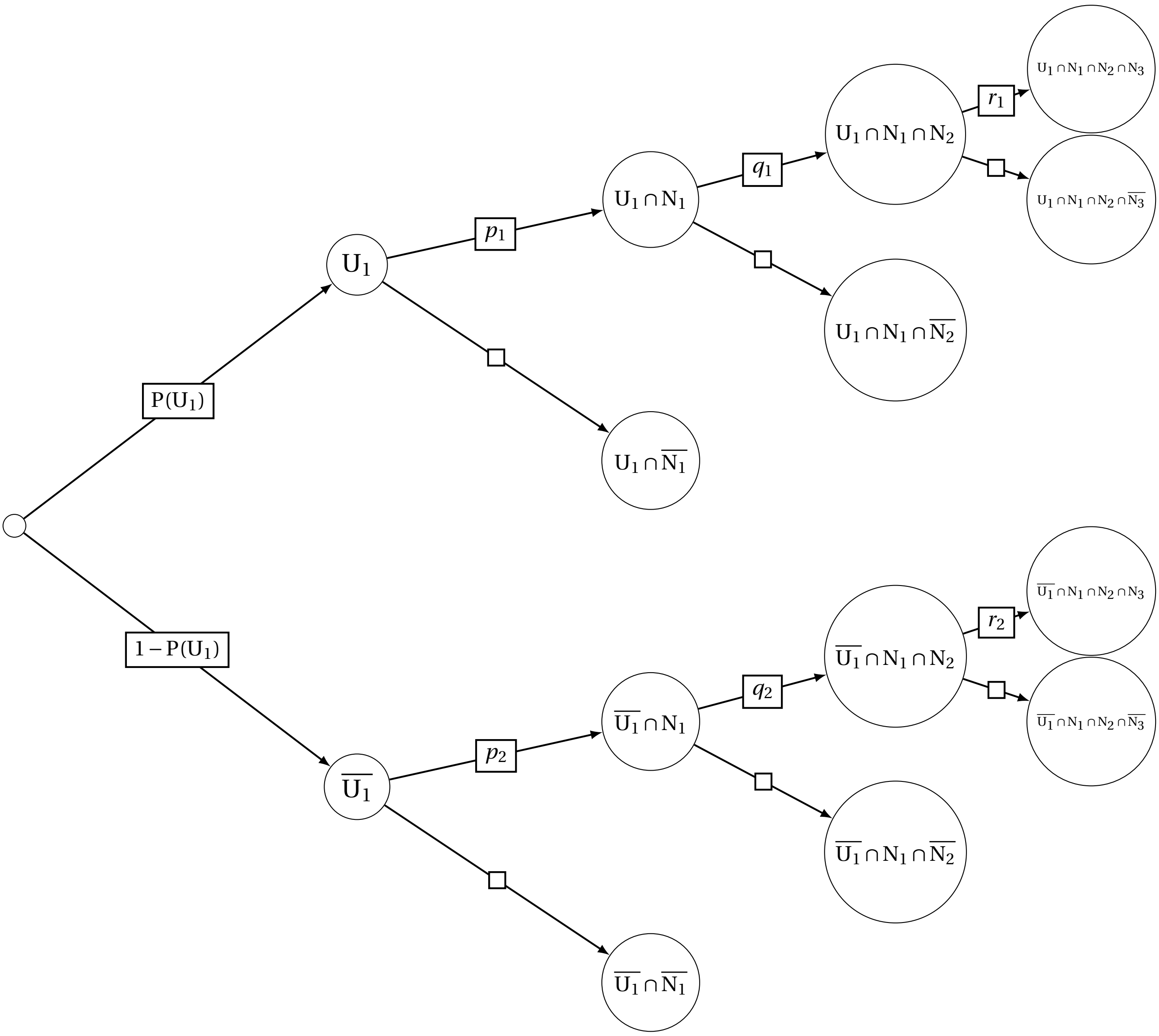
On dispose de deux urnes. L'urne $\mathscr{U}_1$ contient 4 boules noires et 2 boules blanches. L'urne $\mathscr{U}_2$ contient 2 boules noires et 4 boules blanches. On choisit une urne au hasard et on tire successivement 3 boules avec remise dans cette urne. Sachant que les 2 premières boules sont noires, quelle est la probabilité que la 3ème le soit aussi ?

La première difficulté de cet exercice consiste à introduire les événements qui permettront le raisonnement. Ici, il y a un premier événement lié au choix de l'urne. Ensuite, chacun des trois tirages produira une information. En choisissant des noms « bien formulés » pour les événements, on facilite la résolution.

Notons $U_1$ : « on choisit l'urne $\mathscr{U}_1$ » et : $N_i$ : « la boule tirée au $i$ ème tirage est noire »

Introduire un événement $U_2$ est inutile puisque $U_2 = \overline{U_1}$. De même, les événements $B_i$ « la boule tirée au $i$ ème tirage est blanche » ne sert à rien puisque $B_i = \overline{N_i}$

Il s'agit ensuite de traduire l'énoncé à l'aide du formalisme des probabilités
Le sujet demande de calculer la probabilité de $N_3$ sachant que $N_1$ et $N_2$ ont été réalisés autrement dit il s'agit de calculer $P(N_3|N_1\cap N_2)$. D'après le cours : $P(N_3|N_1\cap N_2)=\dfrac{P(N_1\cap N_2\cap N_3)}{P(N_1\cap N_2)}$
Construire un arbre pondéré permet de mieux appréhender le raisonnement à construire. Toutefois, cela devient vite fastidieux...Ci-dessous, nous n'avons représenté que les branches de l'arbre qui seront réellement utiles : on ne poursuit pas les branches dés qu'une boule blanche est tirée.




La structure construite souligne l'existence d'un système complet d'événements $\{U_1,U_2\}$ initial sur lequel on va pouvoir bâtir le raisonnement. Ici, puisqu'il s'agit d'un système du type $\{A,\overline{A}\}$, il n'est pas nécessaire de justifier plus en détail que c'est un système complet d'événements.
On calcule $P(N_1\cap N_2)$ et $P(N_1\cap N_2\cap N_3)$ en utilisant le système complet d'événements $\{U_1,\overline{U_1}\}$ et les formules des probabilités totales et composées :

$$P(N_1\cap N_2)=P(U_1\cap N_1\cap N_2)+P(\overline{U}_1\cap N_1\cap N_2)=P(U_1)\underbrace{P(N_1|U_1)}_{=p_1}\underbrace{P(N_2|U_1\cap N_1)}_{q_1}+P(\overline{U}_1)\underbrace{P(N_1|U_2)}_{=p_2}\underbrace{P(N_2|U_2\cap N_1)}_{=q_2}$$

Par un argument similaire :
$P(N_1\cap N_2\cap N_3)=P(U_1)\times p_1\times q_1\times r_1+P(\overline{U}_1)\times p_2\times q_2\times r_2$ où $r_1=P(N_3|U_1\cap N_1\cap N_2)$ et $r_2=P(N_3|U_2\cap N_1\cap N_2)$
<u>Justifions à l'aide de l'énoncé</u> la valeur des probabilités $P(U_1)$, $p_1,p_2,q_1,q_2,r_1$ et $r_2$ :
- <u>le choix de l'urne est fait au hasard</u> donc le choix est équiprobable entre $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$ donc $P(U_1)=\dfrac{1}{2}=P(\overline{U}_1)$

- sachant $U_1$ réalisé, l'urne contient 4 boules noires et 2 boules blanches, toutes équiprobables aussi
$$p_1 = P(N_1|U_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ 4 cas favorables sur un total de 6 cas}$$
La situation est analogue avec $\mathscr{U}_2$ mais il y a cette fois 2 boules noires et 4 blanches donc $p_2 = P(N_1|\overline{U_1}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- sachant $U_1 \cap N_1$ réalisé, l'urne contient toujours 4 boules noires et 2 boules blanches puisqu'il y a eu remise de la boule noire tirée avant le second tirage aussi $P(N_2|U_1 \cap N_1) = q_1 = p_1 = \frac{2}{3}$. La situation est analogue avec $\mathscr{U}_2$ mais avec la proportion 2 boules noires et 4 blanches donc $P(N_2|\overline{U_1} \cap N_1) = q_2 = p_2 = \frac{1}{3}$.
- sachant $U_1 \cap N_1 \cap N_2$ réalisé, l'urne contient toujours 4 boules noires et 2 boules blanches puisqu'il y a eu remise des boules noires tirées au premier et au second tirage de sorte que $P(N_3|U_1 \cap N_1 \cap N_2) = r_1 = \frac{2}{3}$. La situation est analogue avec $\mathscr{U}_2$ en adaptant les proportions : $P(N_3|\overline{U_1} \cap N_1 \cap N_2) = r_2 = \frac{1}{3}$.
Il est important de repérer dans l'énoncé les situations d'équiprobabilité. Lors des tirages (choix d'objet, tirage de boules ou de cartes, lancés de dés), on sera toujours en situation d'équiprobabilité, parfois souligné par un « au hasard » dans le sujet. Par contre, le tirage peut être truqué (dé non équilibré, carte marquée, boule lestée) mais le sujet le précisera explicitement. Pour justifier une probabilité conditionnelle, on travaille dans une situation particulière où une partie de l'aléa a été levé par supposition.
Application numérique : finalisons désormais le calcul
$P(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{2 \times 9} = \frac{5}{18}$ $\quad P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{3^3} + \frac{1}{2 \times 3^3} = \frac{9}{2 \times 3^3} = \frac{1}{6}$
Aussi : $P(N_3|N_1 \cap N_2) = \frac{1}{6} \times \frac{18}{5} = \frac{3}{5}$

- Des événements A et B sont **deux événements indépendants** lorsque $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
Dans le cas où l'un des événements est de probabilité non nulle, par exemple $P(B) \neq 0$, on a alors : $\boxed{P(A|B) = P(A)}$
Cela signifie donc que connaître de l'information sur l'événement B ne permet pas d'améliorer l'information sur l'événement A puisque la probabilité est la même (d'où la notion d'événements indépendants)

On vérifie facilement que : $\boxed{\text{A et B indépendants} \Rightarrow \text{A et } \overline{B} \text{ indépendants}}$

$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et les deux événements sont incompatibles donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ aussi, vu que A et B sont indépendants : $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A)P(\overline{B})$

Attention ! Ne pas confondre **événements incompatibles**$\neq$ **événements indépendants** !
L'incompatibilité ($A \cap B = \emptyset$) est liée à la nature même des événements alors que l'indépendance $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ est liée à la loi de probabilité. Ainsi, les mêmes événements peuvent être indépendants dans un certain aléa et ne pas l'être dans un autre aléa. Pour vous en convaincre, étudions l'exemple suivant :
EXEMPLE N° 2 On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les événements :
A : « on obtient 3 ou 6 » et B : « on obtient un multiple de 2 »

1. On suppose le dé bien équilibré. Les événements A et B sont ils indépendants ?
2. Même question sachant que le dé est truqué : le 6 apparaît avec une proba $\frac{1}{2}$ et les autres faces sont équiprobables.

1. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et il y a équiprobabilité. $A = \{3,6\}$ d'où $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $B = \{2,4,6\}$ d'où $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$A \cap B = \{6\}$ d'où $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = P(A) \times P(B)$ donc A et B sont indépendants.
2. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Pour $i \in [\![1,6]\!]$, notons $p_i = P(\{i\})$. On sait $p_6 = \frac{1}{2}$ et $\forall i \in [\![1,5]\!]$, $p_i = p$
De plus : $P(\{1,2,3,4,5,6\}) = 1 \Leftrightarrow 5p + \frac{1}{2} = 1$ d'où $p = \frac{1}{10}$. Alors : $P(A) = p_3 + p_6 = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
$P(B) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$ et $P(A \cap B) = p_6 = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{5} \times \frac{7}{10} = P(A) \times P(B)$ donc A et B pas indépendants.

- Des événements $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ (où $n\in\mathbb{N}^*$ fixé) sont **(mutuellement) indépendants**

lorsque $\boxed{\text{, pour toute partie } J\subset[\![1,n]\!],\ P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)=\prod_{j\in J} P(A_j)}$

En général, on omet le terme « mutuellement » : on dit simplement que $\boxed{(A_1,\dots,A_n) \text{ sont indépendants}}$

**Attention ! Il ne suffit pas de vérifier :** $P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\times P(A_2)\times\cdots\times P(A_n)$

En particulier, dire « les trois événements A, B et C sont indépendants » signifie que

$P(A\cap B)=P(A)P(B),\quad P(A\cap C)=P(A)P(C),\quad P(B\cap C)=P(B)P(C)\quad$ et $\quad P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

Enfin, le lien logique entre les propositions suivantes est :

les événement $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ sont mutuellement indépendants $\boxed{\Rightarrow}$ les événements $(A_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ sont 2 à 2 indépendants

**Attention ! Il n'y a pas d'équivalence mais seulement une implication**

EXEMPLE N° 3 On lance deux fois de suite un dé à 6 faces bien équilibré. On définit les événements :

A : « le premier lancer amène un chiffre pair » ; B : « le deuxième lancer amène un chiffre impair » ;

C : « l'un des lancer amène un chiffre pair, l'autre un chiffre impair ».

Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

**Attention ! On attache plus d'importance à la justification des résultats qu'aux résultats en soit !**
**Il s'agit donc d'être rigoureux dans vos justifications et pas simplement d'aligner des calculs...**

Les événements élémentaires de cette expérience aléatoire sont des couples $(i,j)$ où $i$ et $j$ sont dans $\{1,2,3,4,5,6\}=[\![1,6]\!]$

L'univers est donc $\Omega=[\![1,6]\!]\times[\![1,6]\!]$ On peut souvent décrire l'univers en proba fini ce qui sera parfois impossible en proba dénombrable que nous allons travaillé ensuite...

On travaille en situation d'équiprobabilité Information essentielle issue de « dé bien équilibré » c'est elle qui vous permet de justifier les calculs de probas réalisés ensuite

Pour chaque événement E, on a donc : $P(E)=\dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$. On décrit les différents événements :

$A=\{2,4,6\}\times[\![1,6]\!]$ qui contient $3\times 6=18$ élément d'où $P(A)=\dfrac{18}{36}=0,5$.

$B=[\![1,6]\!]\times\{1,3,5\}$ d'où $\text{Card}(B)=18$ et $P(B)=0,5$.

$C=\{2,4,6\}\times\{1,3,5\}\cup\{1,3,5\}\times\{2,4,6\}$ donc $\text{Card}(C)=3\times3+3\times3=18$ et $P(C)=0,5$.

On peut aussi remarquer que les événements $\{2,4,6\}\times\{1,3,5\}$ et $\{1,3,5\}\times\{2,4,6\}$ sont incompatibles et, par la symétrie des rôles des deux dés, de même probabilité donc : $P(C)=2\times P(\{2,4,6\}\times\{1,3,5\})=2\times\dfrac{3\times3}{36}=0,5$

$A\cap B=\{2,4,6\}\times\{1,3,5\}$ d'où $\text{Card}(A\cap B)=9$ et : $P(A\cap B)=0,25=P(A)\times P(B)$ donc A et B sont indépendants.

De même : $A\cap C=B\cap C=\{2,4,6\}\times\{1,3,5\}$ d'où $P(A\cap C)=P(B\cap C)=0,25=P(A)P(C)=P(B)P(C)$

d'où A et C indépendants et B et C indépendants. Ainsi, $\boxed{\text{les événements A, B et C sont bien 2 à 2 indépendants.}}$

$A\cap B\cap C=\{2,4,6\}\times\{1,3,5\}$ d'où $P(A\cap B\cap C)=0,25\neq P(A)\times P(B)\times P(C)$ donc

$\boxed{\text{les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.}}$

Autant il est facile de repérer des événements incompatibles, autant il est très délicat de repérer des événements indépendants ! **Je vous conseille donc de bannir les phrases « les événements sont clairement indépendants »**

L'indépendance est plutôt une hypothèse qu'il faut repérer dans l'énoncé car elle permet de grandement simplifier le calcul : la probabilité des intersections devenant le produit des probabilités individuelles...

**Proposition : Indépendances et passage au complémentaires**

Si $(A_1,\dots,A_n)$ sont des événements indépendants, alors toutes familles d'événements contenant uniquement des $A_k$ ou $\overline{A_k}$ pour des valeurs de $k$ distinctes de $[\![1,n]\!]$ est encore une famille d'événements indépendants.

Toutes les combinaisons sont possibles à conditions d'avoir des indices distincts :
$(A_1,\overline{A_2},A_3,\dots,A_n)$ sont indépendants, $(\overline{A_1},A_2,\overline{A_3})$ sont indépendants, $(A_{n-1},\overline{A_n})$ sont indépendants...

EXEMPLE N° 4 (D'après oral maths 2)
On considère un dé à 6 faces avec 2 faces portant le numéro 0, 2 faces portant le numéro 1 et 2 autres faces portant le numéro 2. On réalise trois lancers indépendants et on note A, B et C les résultats.
On note alors G la partie du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $Ax + By + C = 0$
On réalise une deuxième fois les trois tirages. Les résultats sont notés $A', B'$ et $C'$ et on note H la partie du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $A'x + B'y + C' = 0$

**1.** Calculer la probabilité que G soit une droite.

La difficulté usuelle des étudiants dans cette question est plutôt lié à un manque de recul en géométrie : une équation $Ax + By + C = 0$ décrit une droite lorsque $(A, B) \neq (0, 0)$ ! Il faut en effet pourvoir définir une direction via un vecteur directeur ou un vecteur normal...
On sait que G est une droite $\Leftrightarrow (A, B) \neq (0, 0)$
Ici, il est plus simple de calculer $q = P\Big((A, B) = (0, 0)\Big)$ pour obtenir la probabilité $1 - q$ cherchée.
**A retenir !** Il est parfois nettement plus simple de calculer $P(\overline{A})$ que $P(A)$ !
On a : $a = P\Big((A = 0) \cap (B = 0)\Big)$
D'après le sujet, les lancers sont indépendants donc un événement qui ne concerne que A est indépendant d'un événement qui ne concerne que B. Par suite : $q = P(A = 0) \times P(B = 0)$
Les lancers étant toujours réalisés avec le même dé et dans les même conditions : $P(B = 0) = P(A = 0)$
Enfin, chacune des 6 faces du dé est équiprobables de sorte que : $P(A = 0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ car il y a 2 cas favorables (2 faces à 0) pour 6 cas au total.
Application numérique : la probabilité que G soit une droite est $1 - q = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

**2.** Calculer la probabilité que G soit une droite perpendiculaire à la première bissectrice du plan.

D'un point de vu géométrique, on doit avoir $(A, B) \neq (0, 0)$ et le vecteur directeur $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$ doit être orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui dirige la droite d'équation $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$ soit $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -B + A = 0$.
On cherche donc la probabilité de l'événement E : « $(A, B) \neq (0, 0)$ et $A = B$ »
L'introduction d'une partition sur les différentes valeurs de A est naturelle de part la nature de l'expérience : un premier tirage pour A puis un second pour B etc
On réalise une partition de $\Omega$ avec les événements $E_i$ : « $A = i$ » :
- ces événements sont deux à deux disjoints ($E_1 \cap E_2 = \emptyset = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3$ puisque A ne peut pas prendre deux valeurs distinctes)
- $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \Omega$ puisque le tirage donnant A réalisera bien l'un des événements $E_i$
Méthode n° 1 La formule des probabilités totales donne : $P(E) = \sum_{i=0}^{2} P(E_i) \times P(E|E_i)$
Chacun des tirages $\{0, 1, 2\}$ pour A est équiprobable donc $P(E_i) = \frac{1}{3}$ pour $i \in [\![0, 2]\!]$. Par ailleurs :
- sachant $E_0$ réalisé, E ne peut pas être réalisé car sinon $A = B = 0$ en contradiction avec $(A, B) \neq (0, 0)$
- sachant $E_1$ réalisé, E sera réalisé lorsque $B = 1$ donc $P(E|E_1) = \frac{1}{3}$
- sachant $E_2$ réalisé, E sera réalisé lorsque $B = 2$ donc $P(E|E_2) = \frac{1}{3}$
Finalement : $P(E) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
Méthode n° 2 : On a $P(E) = P(E \cap E_0) + P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2)$
$E \cap E_0 = \emptyset$ puisque $(A, B) \neq (0, 0)$ et $A = B = 0$ sont incompatibles d'où $P(A \cap E_0) = 0$
$P(E \cap E_1) = P\big(\text{« } (A, B) \neq (0, 0) \text{ et } A = B \text{ » et « } A = 1 \text{ »}\big) = P\big(\text{« } A = 1 \text{ » et « } B = 1 \text{ »}\big) = P\big(\text{« } A = 1 \text{ »}\big) \times P\big(\text{« } A = 1 \text{ »}\big) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
Par analogie $P(E \cap E_2) = \frac{1}{9}$ en remplaçant 1 « $A = 1$ » par « $A = 2$ » et « $B = 1$ » par « $B = 2$ ». Aussi : $P(E) = 0 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

**3.** Calculer la probabilité que G et H soient toutes les deux des droites.

Même si ça n'est pas explicitement dit par le sujet, il est légitime de penser que les lancers pour obtenir $A', B'$ et $C'$ sont indépendants et également indépendants des lancers pour obtenir $A, B$ et $C$.
Il est parfois nécessaire de préciser notre compréhension du sujet. Puisque rien n'a été précisé, il est normale de continuer à supposer l'hypothèse d'indépendance. Il faut entendre ici de l'indépendance mutuelle : connaître le résultat de certains des lancers, ne donne aucune information sur le nouveau lancer à effectuer...
L'événement « G est une droite » qui fait intervenir les tirages pour $A, B$ et $C$ est donc indépendant de l'événement « H est une droite » qui fait intervenir les tirages pour $A', B'$ et $C'$ aussi :
$P\big(\text{« H et G sont tous les deux des droites »}\big) = P\big(\text{« H est une droite »}\big) \times P\big(\text{« G est une droite »}\big)$
De plus, les lancers étant réalisé exactement dans les même conditions, on a :
$P\big(\text{« H est une droite »}\big) = P\big(\text{« G est une droite »}\big) = 1 - q = \dfrac{8}{9}$
Finalement : $P\big(\text{« G et H sont tous les deux des droites »}\big) = (1-q)^2 = \dfrac{64}{81}$

**4.** Calculer la probabilité que G et H soient des droites et qu'elles soient parallèles.

Tout d'abord, d'un point de vu géométrique :
G et H sont des droites et elles sont parallèles $\Leftrightarrow (A,B) \neq (0,0),\ (A',B') \neq (0,0)$ et $\begin{vmatrix} -B & -B' \\ A & A' \end{vmatrix} = 0$
puisque les vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -B' \\ A' \end{pmatrix}$ doivent être colinéaires pour que les droites soient parallèles.
Autrement dit, on cherche la probabilité de l'événement K : « $(A,B) \neq (0,0),\ (A',B') \neq (0,0)$ et $AB' = A'B$ »
La nature de l'événement pousse à une partition de l'univers selon les différentes valeurs du couple $(A,B)$
On note $K_{i,j}$ l'événement $K_{i,j}$ : « $A = i$ et $B = j$ » pour $(i,j) \in \{0,1,2\}^2$ : il est clair que $(K_{i,j})_{(i,j)\in\{0,1,2\}^2}$ forme une partition de l'univers puisque un et un seul de ces événements sera réalisé dans l'expérience.
D'après la formule des probabilités totales : $P(K) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} P(K_{i,j})P(K|E_{i,j})$
Par indépendance et puisque les tirages pour A et B sont réalisés avec le même dé où chacune des issue de $\{0,1,2\}$ à une probabilité de $\dfrac{1}{3}$, on a : $P(K_{i,j}) = P\big(\text{« } A = i \text{ et } B = j \text{ »}\big) = P\big(\text{« } A = i \text{ »}\big) \times P\big(\text{« } B = j \text{ »}\big) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$

On détermine désormais les 9 probabilités conditionnelles $P(K|K_{i,j})$.Par symétrie des rôles de A et B, on a $P(K|K_{i,j}) = P(K|K_{j,i})$ ce qui limite l'examen à 6 situations :

- si $(i,j) = (0,0)$ alors K ne peut être réalisé donc $P(K|K_{0,0}) = 0$
- si $(i,j) = (1,0)$ (ou $(i,j) = (0,1)$) alors K sera réalisé si $B' = 0$ et $(A',B') \neq (0,0)$ donc lorsque « $B' = 0$ et $A' \in \{1,2\}$ » est réalisé (resp « $A' = 0$ et $B' \in \{1,2\}$) donc, par indépendance :
  $P(K|K_{1,0}) = P\big(\text{« } B' = 0 \text{ »}\big) \times P\big(\text{« } A' \in \{1,2\} \text{ »}\big) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} = P(K|K_{0,1})$
- si $(i,j) = (2,0)$ (ou $(i,j) = (0,2)$) alors K est réalisé également si $B' = 0$ et $(A',B') \neq (0,0)$ donc, comme avant : $P(K|K_{2,0}) = P(K|K_{0,2}) = \dfrac{2}{9}$
- si $(i,j) = (1,1)$ alors K sera réalisé si $(A',B') \neq (0,0)$ et $A' = B'$ or nous avons examiné cette situation dans la question 2 donc $P(K|K_{1,1}) = \dfrac{2}{9}$
- si $(i,j) = (1,2)$ (ou $(i,j) = (2,1)$) alors K sera réalisé si $(A',B') \neq (0,0)$ et $B' = 2A'$ (resp « $(A',B') \neq (0,0)$ et $A' = 2B'$) ou autrement dit lorsque $A' = 1$ et $B' = 2$. Ainsi :
  $P(K|K_{2,1}) = P(K|K_{1,2}) = P\big(\text{« } A' = 1 \text{ » et « } B' = 2 \text{ »}\big) = P\big(\text{« } A' = 1 \text{ »}\big) \times P\big(\text{« } B' = 2 \text{ »}\big) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$ par indépendance
- si $(i,j) = (2,2)$ alors K sera réalisé si $(A',B') \neq (0,0)$ et $A' = B'$ or nous avons examiné cette situation dans la question 2 donc $P(K|K_{2,2}) = \dfrac{2}{9}$

Finalement : $P(K) = \dfrac{1}{9} \times 0 + 2 \times \dfrac{1}{9} \times \dfrac{2}{9} + 2 \times \dfrac{1}{9} \times \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{9} \times \dfrac{2}{9} + 2 \times \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{14}{81}$

# II) Espaces probabilisés

## II-1) Ensembles dénombrables

**Définitions : Ensemble dénombrable et au plus dénombrable**

• On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E c'est à dire qu'il existe une application $[\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{E}]$ bijective de sorte qu'on peut écrire $\mathrm{E} = \left\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ où $x_n = \varphi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

E *est dénombrable si on peut « numéroter » les éléments de* E

• On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable s'il est fini ou s'il est dénombrable.

Il est peut probable qu'on vous demande des démonstrations sur les ensembles dénombrables. On attend de vous que vous connaissiez la définition et que vous connaissiez les exemples suivants.
Les démonstrations vont utilisez la notion d'application bijective càd injective et surjective dans le cas général (donc pas de noyau/d'image possible comme en algèbre linéaire). On rappelle que :

• $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est injective lorsque $\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2,\ \varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow x = x'$

• $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est surjective lorsque $\forall y \in \mathrm{F}, \exists x \in \mathrm{E},\ y = \varphi(x)$

Exemples :

• $\mathbb{N}$ est un ensemble dénombrable $\varphi = id$ convient et $\mathbb{N}^*$ est un ensemble dénombrable $\varphi = [n \mapsto n+1]$ convient

• Toute partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable

Considérons une partie A de $\mathbb{N}$ càd $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$. Il y a deux alternatives :
- soit A est un ensemble fini donc au plus dénombrable
- soit A n'est pas un ensemble fini et on prouve que A est dénombrable càd en bijection avec $\mathbb{N}$

Construire cette bijection est parfois simple : ça a été facile pour $\mathbb{N}^*$, c'est aussi assez simple pour les parties des entiers pairs/impairs puisque $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathrm{A}_p = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ via $\varphi : k \mapsto 2k$ et avec $\mathrm{A}_i = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ via $\varphi : k \mapsto 2k+1$. Dans le cas général, c'est un peu plus théorique et on utilise que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Aussi : $\varphi(0) = \min(\mathrm{A})$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $\varphi(n) = \min\left\{\mathrm{A} - \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)\}\right\}$
La définition est assuré puisque l'ensemble $\mathrm{A} - \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)\}$ ne sera jamais vide si A n'est pas un ensemble fini. Par construction, la fonction $\varphi$ est strictement croissante donc elle est injective. En outre, la suite $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$ (si elle convergeait, elle devrait être stationnaire puisque suite d'entiers ce qui est contradictoire avec la stricte croissance). Si on fixe $n \in \mathrm{A}$ alors $\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi(k) \geqslant n\}$ est forcément non vide puisque $x$ ne peut pas être un majorant de $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$. On peut donc définir $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi(k) \geqslant n\}$. Par définition : $\varphi(k_0) \geqslant n$
et aussi $\varphi(0) < n,\ \varphi(1) < n,\ \ldots, \varphi(k_0 - 1) < n$
donc $n \in \mathrm{A} - \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(k_0-1)\} \Rightarrow n \geqslant \min\left\{\mathrm{A} - \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(k_0-1)\}\right\} = \varphi(k_0)$ càd $n \geqslant \varphi(k_0)$
On a donc obtenu l'existence d'un entier $k_0$ avec $n = \varphi(k_0)$ ce qui assure la surjectivité.

• $\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable

On définit $\Psi$ sur $\mathbb{Z}$ par $\Psi(k) = \begin{cases} 2k+1 \text{ si } k \geqslant 0 \\ -2k \text{ si } k < 0 \end{cases}$ de sorte que : $\forall k \in \mathbb{Z},\ \Psi(k) \in \mathbb{N}^*$
Surjectivité : $\Psi$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel $n$ non nul,
- soit $n$ est pair et il y a un entier naturel $p > 0$ tel que soit $n = 2p = -2(-p) = \Psi(-p)$ où $-p < 0$
- soit $n$ est impair et il y a un entier naturel $p$ tel que $n = 2p+1 = \Psi(p)$ où $p \geqslant 0$

donc tous les éléments de $\mathbb{N}^*$ ont un antécédent par $\Psi$ soit $\Psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$ est surjective.
Injectivité : Il s'agit de montrer qu'il y a au plus un seul antécédent soit que : $\Psi(k) = \Psi(k') \Rightarrow k = k'$
Si $\Psi(k) = \Psi(k')$ alors $k$ et $k'$ ont le même signe car sinon $\Psi(k)$ et $\Psi(k')$ ont des parités différente.Alors :
- s'ils sont positifs : $\Psi(k) = \Psi(k') \Rightarrow 2k+1 = 2k'+1 \Rightarrow k = k'$
- s'ils sont négatifs : $\Psi(k) = \Psi(k') \Rightarrow -2k = -2k' \Rightarrow k = k'$

Finalement : $[\Psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*]$ est bijective aussi $\mathbb{Z}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^*$ lui même en bijection avec $\mathbb{N}$ donc $\mathbb{Z}$ est bien en bijection avec $\mathbb{N}$ ce qui en fait un ensemble dénombrable.

- $\boxed{\mathbb{N}\times\mathbb{N} \text{ est un ensemble dénombrable}}$

Pour $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, on pose : $\Psi(i,j)=2^i(2j+1)$ de sorte que $\Psi:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$
Injectivité : Prouvons $\Psi(i,j)=\Psi(i',j')\Rightarrow(i,j)=(i',j')$
On suppose : $\Psi(i,j)=\Psi(i',j')\Leftrightarrow 2^i(2j+1)=2^{i'}(2j'+1)$ Si $i<i'$ alors, en divisant par $2^i$, on trouve un nombre impair $2j+1$ égal à un nombre pair $2^{i'-i}(2j'+1)$. C'est absurde donc $i\geqslant i'$. En inversant les rôles, on a aussi $i'\geqslant i$ d'où, en fait, $i=i'$. On simplifie ensuite par $2^i=2^{i'}$ et on obtient : $2j+1=2j'+1\Leftrightarrow j=j'$ Ainsi : $(i,j)=(i',j')$
Surjectivité : On se donne $n\in\mathbb{N}$ et il s'agit de construire $(i,j)$ dans $\mathbb{N}^2$ avec : $n=\Psi(i,j)$
La décomposition en facteur premier entraîne qu'un entier naturel $n$ s'écrit : $n=2^i p_1\times\cdots\times p_r$ où $i\in\mathbb{N}$ et $p_1,\ldots,p_r$ sont les diviseurs premiers avec $3\leqslant p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_r$ non nécessairement distincts mais tous impair.
Le produit $p_1\times\cdots\times p_r$ est donc aussi un nombre impair qu'on note $2j+1$ et on a : $n=2^i(2j+1)=\Psi(i,j)$.
Finalement : $[\Psi:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}]$ est bijective et $\varphi=\Psi^{-1}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^2$ bijective permet de prouver que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable

- $\boxed{\mathbb{R} \text{ ou } [0,1] \text{ ne sont pas dénombrable mais } \mathbb{Q} \text{ est dénombrable}}$ (Résultat admis car Hors programme)

**Proposition : Produit cartésien d'ensemble dénombrable**

Si E et F sont des ensembles dénombrables alors E × F est aussi dénombrable.

Soit $\varphi_1:\mathrm{E}\to\mathbb{N}$ et $\varphi_2:\mathrm{F}\to\mathbb{N}$ les bijections respectives et $\Psi:\mathrm{E}\times\mathrm{F}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ où : $\forall(x,y)\in\mathrm{E}\times\mathrm{F},\ \Psi(x,y)=\big(\varphi_1(x),\varphi_2(y)\big)$
Injectivité : $\Psi(x,y)=\Psi(x',y')\Rightarrow\varphi_1(x)=\varphi_1(x')$ et $\varphi_2(y)=\varphi_2(y')\Rightarrow x=x'$ et $y=y'$ car $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont elles-même injectives.
Surjectivité : Pour $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, il existe $x$ dans E et $y$ dans F avec $\varphi_1(x)=i$ et $\varphi_2(y)=j$ (puisque $\varphi_1$ et $\varphi_2$ surjective) soit $(i,j)=\Psi(x,y)$

E × F est en bijection avec $\mathbb{N}^2$ lui même en bijection avec $\mathbb{N}$ donc E × F est en bijection avec $\mathbb{N}$ et donc dénombrable

### *II-2) Espaces probabilisés*

Si on considère l'univers Ω d'une expérience aléatoire quelconque, Ω est rarement un ensemble fini et il est souvent assez difficile de décrire Ω et, en général, on ne cherche pas forcément à le décrire.

Exemples : L'univers Ω des résultats possibles lorsque l'expérience consiste à

- tirer 3 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes contient $52\times51\times50$ éléments
- lancer une pièce jusqu'à obtenir pile est $\{\mathrm{P},\mathrm{FP},\mathrm{FFP},\mathrm{FFFP},\ldots\}$ est infini mais dénombrable $\varphi(\omega)=$ nb de F avant P
- durée de vie d'une ampoule est $\Omega=[0,+\infty[$ infini et non dénombrable
- lancer d'une craie dans un cercle unité tracé au tableau est $\mathrm{D}=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\right\}$ infini et non dénombrable
- évaluer le nombre des connexions à un site internet (pour une vente privée par exemple) est impossible à décrire

L'important pour faire des probabilités n'est pas forcément de pouvoir décrire tous les événement mais surtout de caractériser ce qu'est un événement. Dans le cas d'un univers fini, on pouvait toujours décrire l'ensemble des événements $\mathscr{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω, c'est à dire des sous-ensemble de Ω (i.e. $\mathrm{A}\in\mathscr{P}(\Omega)\Leftrightarrow\mathrm{A}\subset\Omega$).
Dans le cas d'un univers quelconque, $\mathscr{P}(\Omega)$ est impossible à décrire (puisqu'on ne sait déjà pas décrire Ω) aussi on va plutôt rechercher des conditions minimales devant être vérifiées par un ensemble d'événements d'une expérience aléatoire : on dira que l'ensemble des événements doit être une tribu sur l'univers Ω

**Définition : Tribu sur un univers Ω**

Si Ω est un ensemble quelconque, on appelle tribu sur Ω un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que :

- $\Omega\in\mathscr{A}$
- $\forall\mathrm{A}\in\mathscr{A},\ \overline{\mathrm{A}}\in\mathscr{A}$ où $\overline{\mathrm{A}}=\Omega-\mathrm{A}$ est le complémentaire de A dans Ω *(stabilité par passage au complémentaire)*
- $\forall(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathscr{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n\in\mathscr{A}$ où on rappelle que : $\omega\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n\Leftrightarrow\exists n\in\mathbb{N},\ \omega\in\mathrm{A}_n$ *(stabilité par réunion dénombrable)*

De cette définition découle d'autres propriétés de la tribu :

**Proposition : Propriétés d'une tribu**

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur un ensemble quelconque $\Omega$ alors

- $\emptyset \in \mathscr{A}$
- $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$, $A \cup B$, $A \cap B$ et $A - B$ sont aussi dans $\mathscr{A}$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ où : $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n$ *(stabilité par intersection dénombrable)*

- Prendre $A = \Omega$ et utiliser le 2nd point de la définition de tribu
- Prendre $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$ pour $n \geqslant 2$ et utiliser le point 3 de la définition et $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, $A - B = A \cap \overline{B}$
- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$ puisque : $\omega \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \Leftrightarrow$ non $\left(\exists n \in \mathbb{N},\ \omega \in \overline{A_n}\right) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \notin \overline{A_n} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Exemples :

- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur $\Omega$ (dite tribu grossière)
- $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur $\Omega$ (dite tribu exhaustive) et c'est celle qu'on choisit, en général, lors d'une expérience sur un univers $\Omega$ dénombrable (ou fini) sauf si le sujet précise un autre choix.
- Dans le cas d'un univers non dénombrable, le sujet devrait préciser la tribu utilisée (quitte à vous demandez de vérifier que c'est bien une tribu...) mais, en général, **le sujet se contente de définir certains événements** (càd de donner certains éléments de la tribu). Si vous en avez besoin, **il faudra construire d'autres événements à partir des événements donnés par le sujet à l'aide des opérations** précédentes (passage au complémentaire, réunion ou intersection finie ou dénombrable).

Le vocabulaire des probabilités introduits précédemment se généralise et se complète :

$\emptyset$ est l'événement impossible et $\Omega$ est l'événement certain (c'est forcément des événements par définition d'une tribu)

$\overline{A}$ est l'événement contraire de A i.e. A n'est pas réalisé  $A - B$ est l'événement A est réalisé et B n'est pas réalisé

$A \cup B$ est l'événement l'un des événements A ou B (au moins) est réalisé soit encore « A est réalisé ou B est réalisé »

$A \cap B$ est l'événement A et B sont réalisés (en même temps) soit encore « A est réalisé et B est réalisé »

l'union dénombrable $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est l'événement « il y a un (au moins) des événements $A_n$ réalisé »

càd qu'il existe un $n$ dans $\mathbb{N}$ avec $A_n$ réalisé soit encore : $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n$

l'intersection dénombrable $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ est l'événement « tous les événements $A_n$ sont réalisés (simultanément) »

càd pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $A_n$ est réalisé soit encore : $\omega \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n$

EXEMPLE N° 5 On effectue une suite de jeu de pile ou face.
On définit l'événement $A_n$ « Obtenir pile au n ième lancer » pour $n \in \mathbb{N}^*$

**1. a.** Décrire dans le vocabulaire probabiliste les événements

$$E_1 = \bigcap_{n=10}^{+\infty} A_n, \quad E_2 = \bigcap_{n=1}^{10} \overline{A_n}, \quad E_3 = \bigcap_{n>10} \overline{A_n} \quad \text{et} \quad E_4 = \bigcup_{n\geqslant 10} A_n$$

$E_1$: « On n'obtient que des piles à partir du 10ième lancer »
$E_2$: « Il n'y a pas eu de pile sur les 10 premiers lancers »
$E_3$: « On n'obtient plus de pile à partir du 11 ieme lancers »
$E_4$: « On n'obtient au moins un pile au delà du 10 ème lancer »
Par convention, les inégalités sont larges dans la définition des événements...

**b.** Que dire des évènements $E_1$ et $E_2$ ?
Les événements $E_2$ et $E_3$ sont-ils forcément incompatibles ? sont-ils indépendants ?

$E_1$ et $E_2$ sont incompatibles à cause du résultats du 10 eme lancer qui ne peut être à la fois pile et face.

$E_2$ et $E_3$ ne sont pas incompatibles puisque $E_2 \cap E_3$ est l'événement « on a obtenu que des faces » qui est peut être de probabilité non nulle (imaginons une pièce truquée avec une pièce qui tombe toujours sur face...)

$E_2$ et $E_3$ sont par contre indépendants car ils n'utilisent pas les mêmes lancers: connaître le résultat des 10 premiers lancers n'apporte pas d'information sur les résultats des autres lancers. L'événement $E_2$ utilise les événement $(A_k)_{k\in[\![1,10]\!]}$ et $E_3$ utilise les événements $(A_k)_{k\geqslant 11}$ sont indépendants car il est sous-entendu par le sujet que les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants (définition à venir mais qui généralise simplement à une famille dénombrable celle déjà vu pour une famille finie)

**2.** Décrire à l'aide de notations ensemblistes les événements:

$B_1$: « Il y a au moins un pile sur les 10 premiers lancers »
$B_2$: « Le premier pile, s'il y en a un, n'est pas obtenu sur les 10 premiers lancers »
$B_3$: « On obtient un pile au delà strictement du 10 ième lancer et pas avant »
$B_4$: « On obtient un pile au delà strictement du 10 ième lancer »

$$B_1 = \bigcup_{n=1}^{10} A_n \quad B_2 = \bigcap_{n=1}^{10} \overline{A_n} \quad B_3 = \left(\bigcap_{n=1}^{10} \overline{A_n}\right) \cap \left(\bigcup_{n>10} A_n\right) \quad B_4 = \bigcup_{n>10} A_n$$

**3.** Démontrer que $\overline{\bigcup_{n\geqslant 1} A_n} = \bigcap_{n\geqslant 1} \overline{A_n}$ et décrire cet événement dans le vocabulaire probabiliste.

Démontrer l'égalité de deux événements, c'est démontré l'égalité de deux ensembles...
On peut procéder par double inclusion ou raisonner par équivalence logique lorsque c'est possible (on démontre alors les deux inclusions en même temps)

$$\omega \in \overline{\bigcup_{n\geqslant 1} A_n} \Leftrightarrow \text{non}\left(\exists n \in \mathbb{N}^*, \omega \in A_n\right) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega \notin A_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in \overline{A_n}$$

Il s'agit de l'événement « On n'obtient jamais pile »

**4.** On pose $C_n = \bigcup_{k>n} A_k$. Démontrer que la suite $(C_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante c'est à dire que: $C_{n+1} \subset C_n$
Décrire dans le vocabulaire probabiliste les événements $C_n$ et l'événement $C = \bigcap_{n\geqslant 1} C_n$

Là encore, il s'agit d'une preuve ensembliste d'inclusion.

$$\omega \in C_{n+1} = \bigcup_{k>n+1} A_k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ k > n+1 \text{ et } \omega \in A_k \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ k > n \text{ et } \omega \in A_k \Rightarrow \omega \in \bigcup_{k>n} A_k = C_n$$

si on peut trouver $k > n+1$ avec $A_k$ réalisé, on peut trouver $k > n$ avec $A_k$ réalisé...
$C_n$ : « On obtient au moins un pile au delà du n+1 ieme jeu »
C : « Il y a toujours un pile réalisé après les $n$ premiers lancers pour $n$ aussi grand que voulu »

**5.** Décrire à l'aide de notations ensemblistes l'événement

« On obtient que des piles à partir d'un moment dans le jeu »

$D_n = \bigcap_{k\geqslant n} A_k$ est l'événement « On obtient que des piles à partir de n ieme lancer »
et $D = \bigcup_{n\geqslant 1} D_n$ est l'événement « On obtient que des piles à partir d'un moment dans le jeu »

**Proposition : Passage au complémentaire sur les unions/intersections au plus dénombrable**

*Résultat à connaître et à savoir redémontrer !*

- Le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires :

$$\overline{\bigcup_{k\in I} A_k} = \bigcap_{k\in I} \overline{A_k} \text{ pour I ensemble au plus dénombrable}$$

- Le complémentaire d'une intersection est la réunion des complémentaires :

$$\overline{\bigcap_{k\in I} A_k} = \bigcup_{k\in I} \overline{A_k} \text{ pour I ensemble au plus dénombrable}$$

On dispose donc d'un univers $\Omega$ et de l'ensemble des événements formé par le tribu $\mathscr{A}$.
Il reste à définir ce qu'on appelle une probabilité sur l'univers $\Omega$ muni d'une tribu $\mathscr{A}$ :

**Définition : Probabilité sur un univers $\Omega$ muni d'une tribu $\mathscr{A}$, espace probabilisé**

Si $\Omega$ est un univers muni d'une tribu $\mathscr{A}$, **une probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que

- $P(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles (i.e. $A_k \cap A_l = \emptyset$ si $k \neq l$) alors : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

*(Propriété de $\sigma$-additivité)*

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est alors **un espace probabilisé** où $\mathscr{A}$ est la tribu (ensemble des événements) et P la probabilité.

Remarques :

- Si on utilise la seconde propriété avec $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_k = \emptyset$ pour $k \geqslant 2$, on retrouve la propriété
  $\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset}$ utilisée pour caractériser une probabilité lorsque $\Omega$ est fini
  La définition est ici plus générale puisqu'il s'agit d'accepter les réunions (et intersections) dénombrables d'événements.
  De ce fait, la probabilité vérifie toutes les propriétés usuelles vues dans le cas des univers finis :
  $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A), \quad P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \text{ si A et B sont quelconques et : } \quad A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B)}$
- Cette définition fait apparaître la somme d'une série. Est-elle toujours convergente ? La réponse est oui car

  C'est une série à termes positifs donc elle converge si les sommes partielles sont majorée.

  Pour $N \in \mathbb{N}$, en utilisant le second point avec $A_k = \emptyset$ pour $k > N$, on a : $\sum_{k=0}^{N} P(A_k) = P\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N\big) \leqslant P(\Omega) \leqslant 1$ puisque $A_1 \cap A_2 \cdots \cup A_n \subset \Omega$. La convergence est même absolue.

**Définitions : événement presque sûr, événement négligeable**

- L'événement $\Omega$ est l'événement certain et on sait que $P(\Omega) = 1$.
  Lorsqu'on a $P(A) = 1$ pour un événement A, on dit que A est un événement presque sûr. Il se réalisera.
- L'événement $\emptyset$ est l'événement impossible et on sait que $P(\emptyset) = 0$.
  Lorsqu'on a $P(A) = 0$ pour un événement A, on dit que A est un événement négligeable. Il ne se réalisera pas.

Attention à bien faire la différence entre « événement certain » et « événement presque sûr », entre « événement impossible » et « événement négligeable »

**Propositions : Propriétés de la probabilité dans un espace probabilisé** $(\Omega, \mathscr{A}, P)$

Si $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé, on a :

- Si A et B sont des événements incompatibles, $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
- Si A est un événement alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et donc on a : $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$
- Si A et B sont des événements quelconques, $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
- Si $A_0, \ldots, A_n$ sont des événements quelconques ($n \in \mathbb{N}$) alors $P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$

Pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathscr{A}$, on a :

- si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$ *(Continuité croissante)*
- si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$ *(Continuité décroissante)*
- $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ *(Sous additivité)* (Il est sous-entendu que la série converge sinon on majore par $+\infty$)

• Les 4 premiers points sont un rappel de ce qu'on a vu dans les remarques suivant la définition.

• Pour le point 5, on prouve le résultat par récurrence avec

$$\mathrm{HR}_n \text{ « Si } A_0,\dots,A_n \text{ sont des événements quelconques alors } P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} P(A_k) \text{ »}$$

<u>Initialisation</u> : Pour $n=0$, $P(A_0) \leqslant P(A_0)$

<u>Hérédité</u> : On suppose $\mathrm{HR}_n$ vraie. Soient $A_0,\dots,A_n,A_{n+1}$ sont des événements quelconques,

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) = P\left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right)\cap A_{n+1}\right) \leqslant P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) + P(A_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} P(A_k) \text{ par } \mathrm{HR}_n$$

• *Continuité croissante* : Par croissance, la suite $\big(P(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de réels tous dans $[0,1]$ donc elle est majorée aussi elle converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$ existe et c'est un nombre de $[0,1]$.

Ensuite, pour $n\in\mathbb{N}$, par croissance de la suite d'événements : $\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k = A_n$ donc $P(A_n) = P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k\right)$

Toutefois, on ne peut pas intervertir sans précaution le symbole lim et la probabilité...Il faut utiliser la propriété de σ-additivité mais, pour cela, il faut des événements incompatibles. Et, ce n'est pas le cas avec $A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1}$ (ici $A_n \cap A_{n+1} = A_n$ qui ne vaut pas $\varnothing$ à priori). On définit alors astucieusement :

$\boxed{B_0 = A_0,\ B_1 = A_1 - A_0, B_2 = A_2 - A_1,\dots,B_n = A_n - A_{n-1} \text{ (pour } n \geqslant 1)}$ de sorte que :

– on a <u>$B_k \in \mathscr{A}$ pour tout $k$</u> (voir propriétés d'une tribu)
– <u>les événements $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont 2 à 2 incompatibles</u> : si $\omega \in B_i \cap B_j$ (avec par exemple $i<j$) alors
  $\omega \in B_i \Rightarrow \omega \in A_i$ d'une part
  et $\omega \in B_j \Rightarrow \omega \notin A_{j-1} \Rightarrow \omega \notin A_i$ puisque $A_i \subset A_{j-1}$ d'autre part. Il y a une contradiction et donc $B_i \cap B_j = \varnothing$.
– <u>on a $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$</u> : Comme $B_k \subset A_k$, l'inclusion $\subset$ est triviale. Pour l'autre inclusion, si $\omega \in \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$ alors
  on note $p = \min\{k\in\mathbb{N} \mid \omega \in A_k\}$ (qui existe car partie non vide de $\mathbb{N}$ minorée).
  Si $p=0$ alors $\omega \in A_0 = B_0$. Si $p>1$ alors, par définition, $\omega \in A_p$ et $\omega \notin A_{p-1}$ soit $\omega \in A_p - A_{p-1} = B_p$

Par σ-additivité : $P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(B_k)$ Mais : $P(B_0) = P(A_0)$ et, si $k \geqslant 1$, comme $A_{k-1} \subset A_k$ :

$A_k = A_{k-1} \cup \big(A_k - A_{k-1}\big) = A_{k-1} \cup B_k$ et cette réunion est disjointe aussi $P(A_k) = P(A_{k-1}) + P(B_k)$

donc : $$P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_n\right) = P(A_0) + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \big(P(A_k) - P(A_{k-1})\big)}_{\text{Somme télescopique}} = P(A_0) + \lim_{n\to+\infty} P(A_n) - P(A_0) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$$

• *Continuité décroissante* : $A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow \overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$ donc, par continuité croissante :

$$\lim_{n\to+\infty} P(\overline{A_n}) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \big(1 - P(A_n)\big) = P\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

• *Sous additivité* : On pose cette fois $B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$. On a $B_n \in \mathscr{A}$ (par définition d'une tribu) et

la suite $(B_n)$ est une suite croissante d'événements : $B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k \subset \bigcup\limits_{k=0}^{n+1} A_k = B_{n+1}$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$.

Or : $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ ($\supset$ est trivial car $A_n \subset B_n$ et, pour l'autre inclusion, si $\omega \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$ alors il y a un $n$ où $\omega \in B_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$ donc il y a un $k$ où $\omega \in A_k$ et ainsi$\omega \in \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$) De plus, avec le point 5 des propriétés des probabilité : $P(B_n) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} P(A_k)$

Ainsi : $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \text{ ou } +\infty \text{ selon la nature de la série.}$$

On attend de vous que vous maîtrisiez les définitions : **vous devez connaître les propriétés de $\sigma$-additivité, continuité croissante ou décroissante et de sous-additivité** puisque, dans les exercices, vous serez amenez à les invoquer pour justifier vos calculs. Soulignons également les méthodes suivantes :

---

$\boxed{\text{Point méthode : Calculer } P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right)}$

• S'agit-il d'une suite d'événements $(A_n)_{n\geqslant 1}$ incompatibles ? Si oui, par $\sigma$-additivité : $P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$

*Les calculs de sommes de séries vont utiliser les méthodes classiques où il faut mobiliser les opérations (changement d'indices, dérivation ou intégration terme à terme) sur les séries entières de références*

• S'agit-il d'une suite d'événements $(A_n)_{n\geqslant 1}$ croissantes càd $A_n \subset A_{n+1}$ ?

Si oui, par continuité croissante : $P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$

*Les calculs de limites utiliseront les outils usuels (équivalents, DL, etc)*

---

$\boxed{\text{Point méthode : Calculer } P\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right)}$

• S'agit-il d'une suite d'événements $(A_n)_{n\geqslant 1}$ décroissantes càd $A_{n+1} \subset A_n$ ?

Si oui, par continuité décroissante : $P\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$

*Les calculs de limites utiliseront les outils usuels (équivalents, DL, etc)*

• Le passage au complémentaire transforme l'intersection en réunion : $P\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcap_{n\geqslant 1} A_n}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} \overline{A_n}\right)$
et on peut exploiter les deux premiers points pour parvenir à finaliser le calcul.

---

**Attention ! L'indépendance d'événements concerne des intersections avec un nombre fini d'événements**

*Vous ne ~~pouvez~~ devez pas écrire* « $P\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right) = \prod_{n\geqslant 1} P(A_n)$ » *car la notion de produits infinis n'est pas au programme...*

EXEMPLE N° 6 *Vais-je sortir un cheval de l'écurie lorsque je joue au jeu des petits chevaux ?*

On considère le jeu consistant à lancer un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.

On considère l'événement $A_n$ : « on réalise un 6 au n-ème lancer » et on donne $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

**1.** Comment décrire l'événement $B_n$ ? Calculer sa probabilité.

Le sujet, comme prévu, ne donne ni l'univers ni la tribu mais seulement une famille d'événements ici $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
$B_n$ est bien un événement puisque c'est une union finie (donc au plus dénombrable) d'événements
On sait que $B_n$ est réalisé signifie que l'un (au moins) des $A_k$ est réalisé pour $k \in [\![1, n]\!]$ autrement dit qu'un 6 a été réalisé sur les $n$ premiers lancers. Ainsi : $\boxed{B_n : \text{« un six a été réalisé sur les n premiers lancers »}}$
Les événements $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ ne sont pas incompatibles deux à deux (on peut obtenir 6 sur des lancers distincts)
Attention : $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$ seulement si les événements sont 2 à 2 incompatibles !
Pour calculer la probabilité d'une réunion d'événements incompatibles, il est souvent pertinent de passer au complémentaire et d'utiliser une hypothèse d'indépendance.

$P(B_n) = 1 - P(\overline{B_n})$ où $\overline{B_n} = \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$ et il est raisonnable de supposer les lancers indépendants de sorte que $(\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n})$ sont indépendants et : $P(B_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}) \times \cdots \times P(\overline{A_n})$
Le sujet ne donne pas l'hypothèse d'indépendance mais il ne dit pas le contraire donc il est légitime de supposer l'indépendance des lancers...

Le dé est équilibré donc, au $k$-ième lancer, $P(A_k) = \dfrac{1}{6}$. Aussi : $\boxed{P(B_n) = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n}$

**2.** Décrire l'événement $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$. Calculer sa probabilité. En déduire la réponse à la question initiale (en italique) .

B est bien un événement puisque c'est une réunion dénombrable d'événements. D'après le cours, la réalisation de B signifie que l'un (au moins) des événements $B_n$ est réalisé et donc qu'il y a un entier $n$ tel qu'on a eu un 6 sur les $n$ premiers lancers. Autrement dit, $\boxed{\text{B est l'événement « il y a eu un 6 lors d'un lancer »}}$

Il est clair que, si l'un des $B_n$ est réalisé, alors il y a bien au un 6 lors d'un lancer. Réciproquement, s'il y a eu un 6 lors d'un lancer $n_0$ alors $B_{n_0}$ est réalisée et donc il y a bien un $n$ tel qu'un des $B_n$ est réalisé.

On veut calculer la probabilité d'une union dénombrable et on repère ici que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante puisque $B_n \subset B_{n+1}$ donc on peut utiliser la propriété de continuité croissante :

$$P(B) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 1 \quad \text{car } \left|\frac{5}{6}\right| < 1 \text{ soit } \boxed{P(B)=1}$$

L'événement B est donc presque sûr : il se réalisera et donc on est assuré de pouvoir sortir un cheval de l'écurie lorsqu'on joue au jeu des petits chevaux.
Il faut juste être patient...car le raisonnement suppose qu'on n'est pas limité dans le temps sur le nombre de lancers...Est-ce bien la vérité en pratique?

Il est clair aussi que $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k$ = « il y a eu un 6 lors d'un lancers » . Toutefois, cette réunion n'est ni constituée d'événements 2 à 2 incompatibles et elle n'a pas de propriétés de croissance donc on ne peut lui appliquer aucun des résultats du cours...

EXEMPLE N° 7 On admet qu'on peut définir une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ en posant $P(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $\lambda > 0$ est à choisir convenablement

**1.** Déterminer $\lambda > 0$ en utilisant les propriétés d'une probabilité.

On sait que $P(\mathbb{N}) = 1$ mais $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ où $A_n = \{n\}$ avec les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints

Aussi, par σ additivité, on a: $P(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda}{2^n} = \lambda \times \dfrac{1-0}{1-\frac{1}{2}} = 2\lambda$ (somme géométrique).

Finalement: $P(\mathbb{N}) = 1 \Leftrightarrow 2\lambda = 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{1}{2}}$

**2.** Calculer la probabilité $P\Big(\{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}\Big)$

$$P\Big(\{2k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}\Big) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{2k+1}) \text{ toujours par σ additivité}$$

Alors: $P\Big(\{2k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda}{2^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda}{2} \times \left(\dfrac{1}{2^2}\right)^k = \dfrac{\lambda}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{4^k} = \dfrac{\lambda}{2} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}$ en utilisant les sommes géométriques

Vu que $\lambda = \dfrac{1}{2}$,, on obtient: $P\Big(\{2k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}\Big) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$

<u>Remarque</u>: En passant au complémentaire, on a: $P\Big(\{2k \mid k\in\mathbb{N}\}\Big) = P\Big(\overline{\{2k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}}\Big) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

**3.** Si $B_n = \{2k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$, calculer $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right)$

On a: $B_n \subset B_{n+1}$ donc, par continuité croissante: $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$

Or: $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ donc $P(B_n) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\lambda}{2^{2k}} = \lambda \sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^k = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^{n+1}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{2}{3}$

Puisque $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \{2k \mid k\in\mathbb{N}\}$ , on a retrouvé un résultat cohérent avec la remarque précédente.

## III) *Indépendance*

On étend les résultats sur l'indépendance vu dans le cadre des univers finis au cas d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

**Définitions : Indépendance de deux événements et indépendance mutuelles**

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$,

- les événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- les événement $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé) sont deux à deux indépendants lorsque
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow P(A_j \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$
- les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé) sont mutuellement indépendants lorsque,
$$\text{pour toute partie J avec } J \subset [\![1,n]\!],\ P\left(\bigcap_{k \in J} A_k\right) = \prod_{k \in J} P(A_k)$$

Remarques :

- $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants $\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_n)$ (avec $J = [\![1,n]\!]$)
mais la réciproque est fausse ! Il faut vérifier toutes les intersections de 2, 3,...ou n événements.
- $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants $\Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont 2 à 2 indépendants (avec $J = \{i, j\}$)
mais la réciproque est fausse ! Il faut vérifier toutes les intersections de 2, 3,...ou n événements.

## IV) *Conditionnement*

On étend les résultats sur le conditionnement vu dans le cadre des univers finis au cas d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

**Définition : Probabilité conditionnelle**

Soient A et B deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel
$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
La probabilité conditionnelle $P_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et on a : A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$

Il s'agit de vérifier que : $P_B : \mathscr{A} \to [0,1]$, $P_B(\Omega) = 1$ et $P_B$ vérifie la $\sigma$-additivité.
D'abord : $A \cap B \subset B \Rightarrow 0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(B)$ d'où, en divisant par $P(B) > 0$ : $0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1$
Ensuite : $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$ et, si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'événements 2 à 2 incompatibles, alors :
$$P_B\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_k\right) = \frac{1}{P(B)} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_k \cap B\right) = \frac{1}{P(B)} \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_k \cap B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_B(A_k) \text{ d'où la } \sigma \text{ additivité}$$

**Théorème : Formule des probabilités composées**

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont $n$ événements ($n \geqslant 2$) d'un espace probabilisé avec $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ alors
$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

D'abord $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-2} \subset \ldots A_1 \cap A_2 \subset A_1$ aussi tout les conditionnement sont possibles car, par croissance et vu que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, toutes les probabilités sont bien $> 0$.
On montre ensuite le résultat par récurrence avec :
$HR_n$ « $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$ si $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$ »

Initialisation : Pour $n = 2$, si $P(A_1) > 0$, alors $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)$ par définition de $P_{A_1}(A_2)$

Hérédité : On suppose $HR_n$ vraie. On se donne $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des événements avec $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$
On pose $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ alors $P(A) > 0$ et aussi : $A \subset A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ donc $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$
Par $HR_n$, on a donc : $P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$ et on peut conditionner par A :
$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}) = P(A \cap A_{n+1}) = P(A)P_A(A_{n+1}) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) \times P_A(A_{n+1})$

En définitive, **rien ne change pour l'indépendance ou pour le conditionnement** en passant aux probabilités dénombrable par rapport aux univers finis...Il reste à examiner l'extension des formules de probabilités totales et de la formule de Bayes.

**Définition : Système complet ou quasi-complet au plus dénombrable d'événements**

Soit une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements d'une tribu $\mathscr{A}$ sur l'univers $\Omega$ avec I ensemble fini ou $I = \mathbb{N}$,

• on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements lorsque

- les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles autrement dit : $\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
- la réunion des $(A_i)_{i\in I}$ correspond à l'univers $\Omega$ en entier autrement dit : $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$

• on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi- complet d'événements lorsqu'on remplace la seconde condition par $P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i\in I} P(A_i) = 1$ sous la condition 1 autrement dit lorsque $\bigcup_{i\in I} A_i$ est un événement presque sûr.

**Théorème : Formule des probabilités totales**

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements alors

$$\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} P(B\cap A_n) \text{ converge} \quad \text{et on a :} \quad P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P(B|A_n)$$

Puisque $(A_n)$ est un système complet d'événements , les événements $(B\cap A_n)_{n\geqslant 0}$ sont 2 à 2 incompatibles aussi la série à termes $\geqslant 0$ est CVA car les sommes partielles sont majorées par 1 : $\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} P(B\cap A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{N} B\cap A_n\right) \leqslant 1$

$B = B\cap\Omega = B\cap\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty}(B\cap A_n)$ d'où, par $\sigma$-additivité : $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P(B|A_n)$

Remarques :

• On adopte la convention $P(A_n)P(B|A_n) = 0$ si $P(A_n) = 0$. La formule généralise donc celle obtenue avec un système complet comportant un nombre fini d'événements.

• On peut toujours imaginer la situation avec un arbre pondéré mais il a une infinité de branches...L'hypothèse de quasi-complétude assure qu'on empruntera une et une seule des branches vers l'un des événements $A_n$...sachant que les branches correspondant à des $P(A_n) = 0$ ne sont pas empruntées en pratique.

**Théorème : Formule de Bayes**

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B un événement avec $P(B) \neq 0$

$$\text{alors :} \qquad \forall n \in \text{NN},\ P(A_n|B) = \frac{P(A_n\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_n)P(B|A_n)}{\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)P(B|A_k)}$$

Il suffit de refaire le même raisonnement que celui fait pour les univers finis mais en utilisant la formule des probabilités totales vu juste avant.

EXEMPLE N° 8 On lance deux dés équilibrés jusqu'à obtenir un total de 5 ou de 7.

**1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_n$ l'événement « on obtient 5 pour la première fois au $n$ ieme lancer », calculer $P(E_n)$.

On note $A_k$ « On obtient un total de 5 au $k$ ieme lancé » et $B_k$ « On obtient un total de 7 au $k$ ieme lancé » de sorte que : $E_n = (\overline{A_1} \cap \overline{B_1}) \cap (\overline{A_2} \cap \overline{B_2}) \cap \cdots \cap (\overline{A_{n-1}} \cap \overline{B_{n-1}}) \cap A_n$ qui traduit "Le 1er lancer ne donne ni 5 ni 7" et "le 2nd lancer ne donne ni 5 ni 7" et ainsi de suite jusqu'au $n-1$ ème lancer et "le $n$ eme lancer donne 5"

Connaître les résultats de certains lancers n'apportent bien sûr aucune information sur les résultats des autres lancers de sorte que les différents lancers (et les événements qui s'y rapportent) sont indépendants. De ce fait :

$$P(E_n) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} P\left(\overline{A_k} \cap \overline{B_k}\right)\right) \times P(A_n) \qquad \text{et, pour } k \in [\![1, n-1]\!] : \quad P\left(\overline{A_k} \cap \overline{B_k}\right) = 1 - P\left(A_k \cup B_k\right)$$

Par contre, nous n'avons aucun argument pour penser que, sur un lancer $k$ fixé, les événements $A_k$ et $B_k$ soient indépendants. Par passage au complémentaire, on déplace le problème en un calcul de probabilité d'une réunion où on dispose d'autres arguments

Étudions maintenant la situation à $k$ fixé autrement dit on travaille désormais avec l'expérience aléatoire consistant à lancer 2 dés : l'univers de cette expérience est $\Omega = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$ qui contient $6 \times 6$ résultats équiprobables(car les dés sont équilibrés)

Les issues favorables pour la réalisation de $A_k$ sont $\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ soit $P(A_k) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Les issues favorables pour une somme à 7 sont $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(4,2),(6,1)\}$ soit $P(B_k) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Les événements $A_k$ et $B_k$ sont incompatibles donc : $P(A_k \cup B_k) = P(A_k) + P(B_k) = \frac{2+3}{18} = \frac{5}{18}$

On peut donc conclure que : $P(E_n) = \left(1 - \frac{5}{18}\right)^{n-1} \times \frac{1}{9} \Leftrightarrow \boxed{P(E_n) = \frac{1}{9}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}}$

**2.** Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête parce qu'on a obtenu un 5 ?

On note $E$ « le jeu s'arrête parce qu'on a obtenu un 5 » qui se réalise s'il existe un $n$ avec $E_n$ réalisé donc : $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ et les événements $(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont 2 à 2 incompatibles ($E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$ car le jeu ne peut pas finir sur un 5 en $n$ et en $m$ lancer en même temps) donc, par σ additivité : $P(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}$

**3.** Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête parce qu'on a obtenu un 7 ?

On procède de manière analogue avec : $F_n$ l'événement « on obtient 7 pour la première fois au $n$ ieme lancer » et : $F$ « le jeu s'arrête parce qu'on a obtenu un 7 » Il suffit, dans 1), de substituer $B_n$ à $A_n$ dans la définition de $E_n$ pour obtenir $F_n$ et donc de remplacer le $\frac{1}{9}$ par $\frac{1}{6}$ dans le calcul de la probabilité :

$P(F_n) = \frac{1}{6}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}$ puis : $F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ (réunion disjointe) d'où, par σ-additivité : $P(F) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{3}{5}$

**Attention !** $F = \overline{E}$ est FAUX ! L'univers de l'expérience est $\Omega = E \cup F \cup G$ où $G$ est « le jeu ne s'arrête pas ». C'est par le calcul qu'on démontre que $G$ est de probabilité nulle (cf question 4) donc qu'il est négligeable...

**4.** Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

« Le jeu ne s'arrête pas » est le contraire de l'événement $E \cup F$ : « le jeu s'arrrête » Or : $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ car $E$ et $F$ sont incompatibles. Soit : $P(E \cup F) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$ donc la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais est nulle.

**5.** Si on joue avec un total qui vaut 2 ou 3 à la place de 5 ou 7, est-ce que le jeu s'arrête ?

En substituant 2 à 5 et 3 à 7, on a : $P(A_k) = \frac{1}{36}$ et $P(B_k) = \frac{1}{18}$ d'où $P(A_k \cup B_k) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$,

puis : $P(E_n) = \frac{1}{36}\left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}$, $P(F_n) = \frac{1}{18}\left(\frac{11}{12}\right)^{n-1}$ qui conduit à $P(E) = \frac{1}{36} \times \frac{1}{1-\frac{1}{12}} = \frac{1}{3}$ et $P(F) = \frac{2}{3}$

On retrouve que $P(E \cup F) = 1$ et le jeu s'arrête ! Cela tient au fait qu'on s'autorise une infinité de lancer...Même s'il faudra sans doute plus de temps, le jeu s'arrêtera. En proba, tout ce qui est réalisable (càd de proba non nulle), ce réalisera ( à condition d'être patient et de répéter l'expérience suffisamment)