CHAPITRE XI: ISOMÉTRIES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Dans tout le chapitre, $(E, \langle ., . \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n et on note $\|.\|$ la norme associée.

I) Isométries vectorielles

I-1) Définition et caractérisation

Définition : Isométrie vectorielle d'un espace euclidien

Une isométrie vectorielle de l'espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$ est un endomorphisme de E qui conserve la norme :

$$f \text{ est une isométrie vectorielle de E} \Leftrightarrow \begin{cases} f \in \mathscr{L}(E) \\ \forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\| \end{cases}$$

Exemple : id_E et $-id_E$ sont des isométries de E

Proposition :

Une isométrie vectorielle de l'espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$ est un automorphisme

Théorème : Caractérisation des isométries vectorielles d'un espace euclidien

Dans l'espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$, on a

f est une isométrie de E $\Leftrightarrow$ $f : E \to E$ conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

$\Leftrightarrow$ $f \in \mathscr{L}(E)$ et l'image d'une base orthonormée de E est encore une base orthonormée de E

I-2) Groupe orthogonal

Théorème et définition : Groupe orthogonal O(E)

On appelle O(E) l'ensemble des isométries de l'espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$.

- la composée de deux isométries est une isométrie : $\forall (f, g) \in O(E)^2,\ f \circ g \in O(E)$
- $id_E \in O(E)$ et la réciproque d'une isométrie est une isométrie : $\forall f \in O(E),\ f^{-1} \in O(E)$

On appelle O(E) le groupe orthogonal de E

Attention ! O(E) n'est pas stable par combinaison linéaire car : $id_E - id_E = [x \mapsto 0] \notin O(E)$ si $n \geqslant 1$

Proposition : Sev stables par une isométrie

Soit $f \in O(E)$ une isométrie de l'espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$

si F est un sous-espace vectoriel stable par f alors $F^{\perp}$ est aussi stable par f

I-3) Exemple de référence : les symétries orthogonales

Définitions : Symétrie orthogonale et réflexion

Dans l'espace euclidien $(E, \langle ., . \rangle)$, pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a : $F \oplus F^{\perp} = E$

- une symétrie orthogonale est une symétrie vectorielle par rapport à un sev F de E et parallèlement à $F^{\perp}$

  Si on appelle s la symétrie orthogonale par rapport au sev F de E, on rappelle que :

  $$\forall x = x_F + x_{F^{\perp}} \in E = F \oplus F^{\perp},\ s(x) =$$

  et qu'on a : F = et $F^{\perp} =$
- une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H de E

Proposition :

Les symétries orthogonales (et donc les réflexions) sont des isométries

II) *Matrices orthogonales*

II-1) *Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée, matrice de passage entre des bases orthonormées*

• Considérons un espace euclidien $\left(E, \langle .,. \rangle\right)$ munit d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Étant donnée un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, on s'intéresse à la matrice M de u dans la base $\mathscr{B}$:

$\forall j \in [\![1, n]\!],\ u(e_j) =$ donc : $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) =$

Notons C_j la colonne j de la matrice M. Calculons le coefficient (i, j) de la matrice $M^T M$.
Par définition, c'est le produit de la ligne i de M^T qui vaut par la colonne j de M soit

$[M^T M]_{ij} =$

• Considérons un espace euclidien $\left(E, \langle .,. \rangle\right)$ munit de deux base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.
Si P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, comparons les coefficients (i, j) de P et P^{-1}.

On sait que $P =$, or, pour $j \in [\![1, n]\!]$: $e'_j =$ aussi : $[P]_{ij} =$

De façon analogue : $P^{-1} =$ donc : $[P^{-1}]_{ij} =$
Ainsi : de sorte que et, par suite : $P^T P =$

II-2) *Matrice orthogonale*

Définition : Matrice orthogonale

Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M^T M = I_n = M M^T$
On note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales qu'on appelle le groupe orthogonal

Caractérisation des matrices orthogonales

Soit une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$,
M est une matrice orthogonale $\Leftrightarrow$ $M^T M = I_n$
$\Leftrightarrow$ $M M^T = I_n$
$\Leftrightarrow$ M est inversible avec $M^{-1} = M^T$
$\Leftrightarrow$ les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow$ les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$
$\Leftrightarrow$ M est une matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée

EXEMPLE N° 1 On considère la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ \sqrt{2} & d & c \end{pmatrix}$ où (a, b, c, d) sont des réels.
Déterminer ces réels pour que A soit une matrice orthogonale.

II-3) *Matrices orthogonales et isométries*

Théorème : Caractérisation matricielle des isométries

Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $\left(E, \langle .,. \rangle\right)$ et si $u \in \mathscr{L}(E)$,
u est une isométrie $\Leftrightarrow$ $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale

Théorème : Caractérisation matricielle des symétries orthogonales

Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $\left(E, \langle ., .\rangle\right)$ et si $u \in \mathscr{L}(E)$,

$$u \text{ est une symétrie orthogonale} \Leftrightarrow M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est orthogonale et } M^2 = I_n$$

Proposition : Déterminant d'une matrice orthogonale, déterminant d'une isométrie

- Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1
- Le déterminant d'une isométrie vaut 1 ou -1

Proposition : Spectre d'une matrice orthogonale, d'une isométrie

Les valeurs propres d'une isométrie (d'une matrice orthogonale) sont de module 1

Définition : Isométrie vectorielle directe, groupe spécial orthogonal

- On dit qu'une isométrie vectorielle est directe lorsque son déterminant vaut 1.
  On appelle $SO(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles directes.
- On appelle groupe spécial orthogonal l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1.
  On le note $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$.
- On dit qu'une isométrie vectorielle est indirecte lorsque son déterminant vaut -1.

Attention! Changement de terminologie : on parlait dans l'ancien programme d'isométries positives ou négatives.

Proposition : Propriétés de $SO_n(\mathbb{R})$

- $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$
- Si $A \in SO_n(\mathbb{R})$ et $B \in SO_n(\mathbb{R})$ alors $AB \in SO_n(\mathbb{R})$
- Si $A \in SO_n(\mathbb{R})$, $A^{-1} = A^T \in SO_n(\mathbb{R})$

- La composée de deux isométries vectorielles directes est directe.
  La composée de deux isométries vectorielles indirectes est aussi indirecte.
- Orienter un espace euclidien $\left(E, \langle ., .\rangle\right)$, c'est choisir une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de référence.
  Dés lors, si on considère une autre base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, il a deux possibilités
  - soit $P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \in SO_n(\mathbb{R})$ (lorsque $\det P = 1$) et on dit que $\mathscr{B}$ est une base directe
  - soit $P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \in O_n(\mathbb{R}) - SO_n(\mathbb{R})$ (lorsque $\det P = -1$) et on dit que $\mathscr{B}$ est une base indirecte.

III) Isométries de l'espace euclidiens de dimension 2 et 3

III-1) Orientation du plan et de l'espace usuels

Proposition : orientation d'un espace euclidien, base directe et indirecte

On dit qu'on oriente un espace euclidien E en choisissant une base orthonormée $\mathscr{B}_0$ de référence de E.
On sait déjà que, pour tout autre base $\mathscr{B}$ orthonormée de E, la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}}$ est orthogonale.
On dira que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe lorsque la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B}_0,\mathscr{B}} \in SO_n(E)$ (càd $\det P = 1$)
Elle sera indirecte dans le cas contraire.
Par convention :

- les bases directes du plan sont celles respectant le sens trigonométrique en général.
- les bases directes de l'espace sont celles qui respectent la règle des trois doigts de la main droite.

Dans un espace de dimension 3 :
- on oriente une droite D en choisissant un vecteur directeur unitaire $\vec{e}_1$ de cette droite. De fait, cela induit une orientation du plan $D^{\perp}$: une base orthonormée $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est directe dans $D^{\perp}$ lorsque la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est directe.
- on orientera un plan P en choisissant une orientation de la droite $P^{\perp}$

Corollaire : Caractérisation des matrices de $O_2(\mathbb{R}), SO_2(\mathbb{R}), O_3(\mathbb{R}), SO_3(\mathbb{R})$

Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ($n \in \{2,3\}$), on note C_i la colonne i de M. *On note* X.Y *le produit scalaire usuel de* $\mathbb{R}^3$

$M \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow C_1.C_2 = 0,\quad C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2$

$M \in SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow C_1.C_2 = 0,\quad C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2$ et $\det(M) = 1$

$M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow C_1.C_2 = 0,\quad C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2$ et $C_3 = \pm C_1 \wedge C_2$

$M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow C_1.C_2 = 0,\quad C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2$ et $C_3 = C_1 \wedge C_2$

III-2) Description des isométries vectorielles planes

L'objectif de cette partie est de décrire toute les isométries de $O(\mathbb{R}^2)$ et de préciser celle de $SO(\mathbb{R}^2)$.

On considère f une isométrie de $\mathbb{R}^2$ et sa matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base orthonormée $\mathscr{B}$

(Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}^2$ mais pas forcément...)

$M^T M = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 \Leftrightarrow$

Théorème : Description de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$

- $M \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix}$
- $M \in SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Corollaire : Description des isométries planes

- Les isométries planes directes sont les rotations planes d'angle θ. Dans une base orthonormée quelconque, la matrice de l'isométrie est la matrice de rotation $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
  et on a : $R(\theta)R(\phi) = R(\theta+\phi) = R(\phi)R(\theta)$ et $R^T(\theta) = R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$
- Les isométries planes indirectes sont des réflexions (symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan donc ici une droite).
  Dans une base orthonormée, la matrice de l'isométrie est $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

  Remarque : L'isométrie est la réflexion par rapport à $\operatorname{Ker}(f - id) = \operatorname{Vect}\left(\cos\frac{\theta}{2}e_1 + \sin\frac{\theta}{2}e_2\right)$

Nature géométrique	det	spectre	sev propre	Matrice dans toute BON
$f = id$ (rotation d'angle $\theta \equiv 0[2\pi]$) $f = -id$ (retournement ou rotation d'angle $\theta \equiv \pi[2\pi]$) Rotation d'angle $\theta \not\equiv 0[\pi]$	1 1 1			I_2 $-I_2$ $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
Réflexion d'axe $\operatorname{Vect}(\vec{u})$	-1			$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Méthode : Reconnaître une isométrie du plan

Étant donné une isométrie f de $\mathbb{R}^2$,

- on détermine sa matrice M dans une base orthonormée quelconque de $\mathbb{R}^2$
- si $\det f = \det M = 1$ alors c'est une rotation (éventuellement l'identité ou un retournement)
  On peut préciser l'angle θ de la rotation en identifiant $M = R(\theta)$
- si $\det f = \det M = -1$ alors c'est une réflexion d'axe $D = E_1(f) = \operatorname{Ker}(f - id)$ $\quad (D^\perp = E_{-1} = \operatorname{Ker}(f + id))$

III-3) Description des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$

L'objectif de cette partie est de décrire toute les isométries de $O(\mathbb{R}^3)$ et de préciser celle de $SO(\mathbb{R}^3)$.
On sait que χf est un polynôme unitaire de degré 3 à coefficients réels : il admet donc forcément une racine réelle.

Cette racine est forcément 1 ou -1 :
Comme χ_f est un polynôme à coefficients réels, les deux autres racines de χ_f sont :
soit deux réels de $\{-1;1\}$
soit deux complexes conjugués $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$

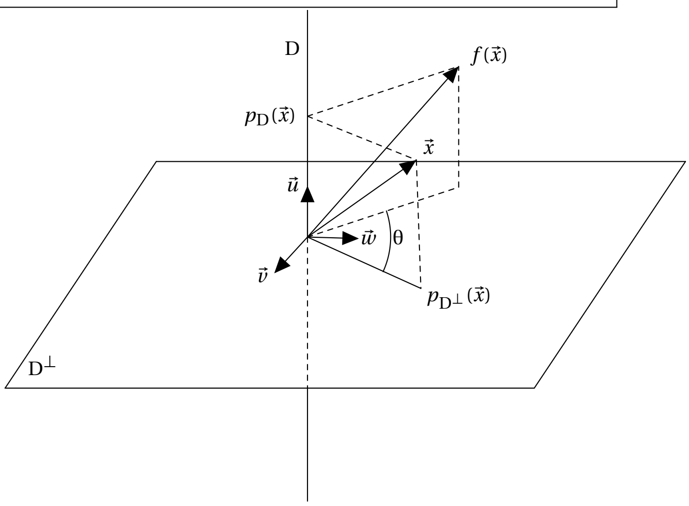
- $\boxed{\text{Si } f \text{ est une isométrie directe (ie } f \in SO(\mathbb{R}^3))}$: 1 est forcément une valeur propre

On peut trouver une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ avec $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$

et, de façon plus précise :

$$\boxed{\text{il existe une base orthonormée directe } \mathscr{B} = (u, v, w) \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ et un réel } \theta \text{ avec } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

autrement dit : $\boxed{f \text{ est une rotation vectorielle d'angle } \theta \text{ et d'axe } D = \text{Vect}(u)}$



avec les cas particuliers où $f = id$ si et f est un retournement ou demi-tour si

On remarque que : $\boxed{\text{tr}(f) = 2\cos\theta + 1}$

De plus, si $v \in D^\perp$ avec $\|v\| = 1$: $\boxed{v.f(v) = \cos\theta}$

$\boxed{\det(u, v, f(v)) = \sin(\theta)}$

$\boxed{v \wedge f(v) = (\sin\theta)\, u}$

Exercice classique : $\boxed{\text{Expression vectorielle d'une rotation}}$

On considère une rotation vectorielle r d'axe $D = \text{Vect}(u)$ où u est unitaire et d'angle θ.
Démontrer que, pour tout vecteur x de E : $r(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)u \wedge x + (1-\cos\theta)(x.u)u$

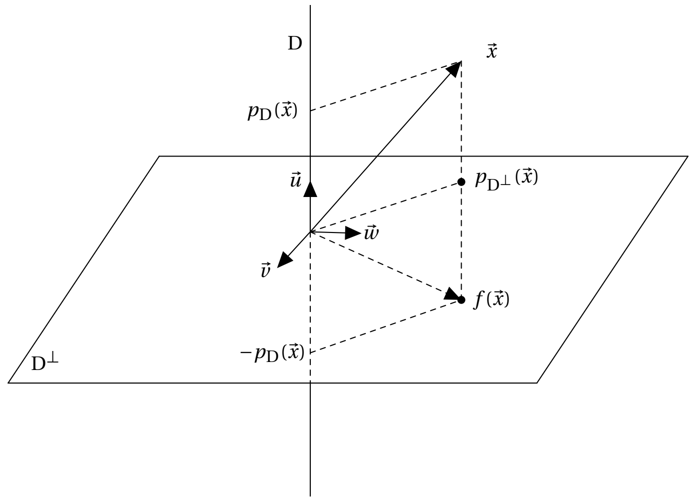
• $\boxed{\text{Si } f \text{ est une isométrie indirecte}}$: -1 est forcément une valeur propre

$$\boxed{\text{il existe une base orthonormée directe } \mathscr{B} = (u, v, w) \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ et un réel } \theta \text{ avec } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

or : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

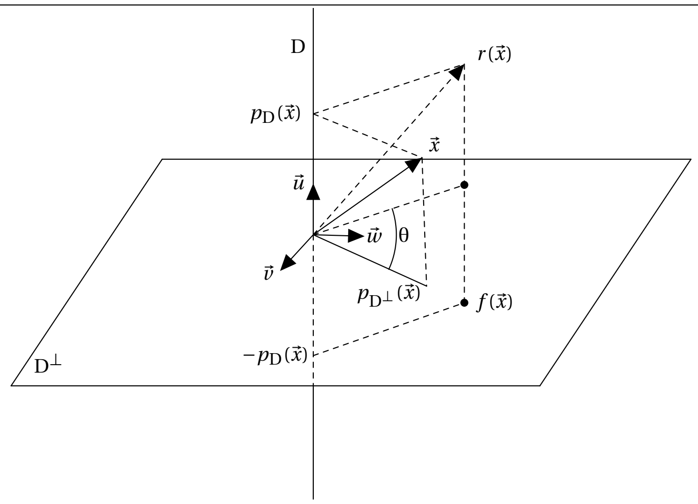
$$\boxed{\text{La matrice } S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la matrice d'une réflexion par rapport au plan } D^\perp \text{ où } D = \mathrm{Vect}(u).}$$

aussi $\boxed{f \text{ est la réflexion par rapport à } D^\perp \text{ où } D = \mathrm{Vect}(u) \text{ lorsque } \theta \equiv 0[2\pi]}$



Plus généralement :

$\boxed{f \text{ est la composé d'une réflexion par rapport au plan } D^\perp = \mathrm{Vect}(u)^\perp \text{ et d'une rotation d'angle } \theta \text{ d'axe } D}$



avec les cas particuliers où $f = -id$ si
et f est la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \mathrm{Vect}(u)^\perp$ si

On a : $\boxed{\mathrm{tr}(f) = -1 + 2\cos\theta}$. De plus, <u>si $v \in D^\perp$ avec $\|v\| = 1$</u> : $\boxed{v \wedge f(v) = (\sin\theta)u}$

Proposition : Description des isométries de $\mathbb{R}^3$

Nature géométrique	det	spectre	sev propre	Matrice dans une certaine BOND
id	1			I_3
f est un demi-tour	1			$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Rotation d'angle $\theta \not\equiv 0[\pi]$ d'axe D	1			$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$-id$	-1			$-I_3$
Réflexion	-1			$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Composée rotation/réflexion	-1			$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Méthode : Reconnaître une isométrie de $\mathbb{R}^3$

Soit $f \neq \pm id$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A dans une base orthonormée (éventuellement la base canonique),

- on vérifie que $A \in O_3(\mathbb{R})$ éventuellement $SO_3(\mathbb{R})$ sur les colonnes de A
  (la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée directe)
- Si $A \in SO_3(\mathbb{R})$, c'est une rotation (éventuellement un demi-tour).
  On précise l'axe de la rotation : $D = E_1 = \text{Ker } (f - id) = \text{Ker } (A - I_3) = \text{Vect}(u)$ ($f \neq id$)
  On précise l'angle de la rotation θ en déterminant $\cos\theta$ et le signe de $\sin\theta$ qu'on obtient
  pour $\cos\theta$ avec : $\text{tr}(f) = \text{tr}(A) = 2\cos\theta + 1$ ou bien $\cos\theta = v.f(v)$ où $v \in D^\perp$ est unitaire
  pour $\sin\theta$ avec : $\sin\theta = \det(u, v, f(v))$ où $\|u\| = \|v\| = 1$ et $v \in D^\perp$
  ou bien : en comparant une coordonnée de $v \wedge f(v)$ et de u puisque : $v \wedge f(v) = \sin(\theta) u$
  La suite n'est pas explicitement au programme sauf dans le cas d'une réflexion
- Si $A \in O_3(\mathbb{R}) - SO_3(\mathbb{R})$, c'est la composée d'une rotation et d'une réflexion (éventuellement la rotation est id)
  On précise l'axe de la rotation, c'est $D = E_{-1} = \text{Ker } (f + id) = \text{Ker } (A + I_3)$.
  La réflexion est celle par rapport à $D^\perp$.
  On précise l'angle de la rotation en déterminant $\cos\theta$ et le signe de $\sin\theta$ qu'on obtient
  pour $\cos\theta$ avec : $\text{tr}(f) = \text{tr}(A) = -1 + 2\cos\theta$ ou bien $\cos\theta = v.f(v)$ où $v \in D^\perp$ est unitaire
  pour $\sin\theta$ avec : $\sin\theta = \det(u, v, f(v))$ où $\|u\| = \|v\| = 1$ et $v \in D^\perp$
  ou bien : en comparant une coordonnée de $v \wedge f(v)$ et de u puisque : $v \wedge f(v) = \sin(\theta) u$
  Si$\theta \equiv 0[2\pi]$ alors f est la réflexion par rapport à $D^\perp$.

SUITE EXEMPLE N° 1 Décrire géométriquement l'isométrie f qui est alors canoniquement associée à A

EXEMPLE N° 2 On note $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la réflexion par rapport au plan F d'équation: $x + y + z = 0$

2. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe orienté par $\vec{i} - \vec{k}$ et d'angle π

SUITE EXEMPLE N° 2 Proposer une autre méthode pour répondre à la question 2) de l'exemple précédent

IV) *Matrice symétrique réelle*

Définition et propositions : Matrice symétrique/antisymétrique réelle

• Une matrice carrée A d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) est symétrique lorsque $A^T = A$. L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients réelles noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$

• Une matrice carrée A d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) est antisymétrique lorsque $A^T = -A$. L'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients réelles noté $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$

• $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux de $M_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}(M^T N)$.

• $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \quad M = \underbrace{\dfrac{M+M^T}{2}}_{\in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\dfrac{M-M^T}{2}}_{\in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})} \in M_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^{\perp} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$

de sorte que $\left[p : M \mapsto \dfrac{M+M^T}{2}\right]$ est la projection orthogonale sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Proposition : Orthogonalité des sev propres d'une matrice symétrique réelle

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux

Théorème : Théorème spectral de réduction des matrices symétriques réelles

(ADMIS)
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $M_n(\mathbb{R})$ avec une matrice de passage orthogonale
autrement dit : $\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}), D = P^{-1}AP = P^TAP$ est diagonale et réelle

On dit que A **est orthogonalement diagonalisable**

Remarque : on peut aussi dire que
Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ avec une base orthonormée de vecteurs propres.

Attention ! Il s'agit d'un théorème pour les **matrices réelles !**

Construction d'un contre-exemple dans $\mathscr{S}_2(\mathbb{C})$:

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice symétrique d'ordre 2 à coefficients complexes soit non diagonalisable. Préciser alors un exemple concret de matrice symétrique complexe non diagonalisable.

EXEMPLE N° 3 Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^T \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} P$ soit diagonale.

V) Application à l'étude des coniques

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on considère une conique d'équation

$$\underbrace{ax^2+2bxy+cy^2}_{\text{partie quadratique}}+\underbrace{dx+ey}_{\text{partie linéaire}}+f=0 \quad (E)$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels avec $(a, b, c) \neq (0,0,0)$.

Nous avons déjà appris à identifier les coniques sans terme croisé $2bxy$ dans la partie quadratique en éliminant la partie linéaire pour revenir aux équations réduites des coniques.
Nous allons maintenant apprendre à réaliser un changement de repères (orthonormés) pour faire disparaître ce terme croisé.

V-1) Disparition du "terme croisé" par rotation de la base

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors : $X^T AX =$

Le théorème spectral s'applique à la matrice symétrique réelle A : $\exists P \in O_2(\mathbb{R}), \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = D$

Quitte à inverser l'ordre des colonnes de P, $P \in SO_2(\mathbb{R})$ de sorte que P est une matrice de rotation plane d'angle θ.
La matrice P est une matrice de passage entre la base orthonormée $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et une nouvelle base $\mathscr{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ orthonormée directe obtenue par rotation d'angle θ et les colonnes de P sont des vecteurs propres unitaires de A.
Si on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées dans $\mathscr{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ celles dans $\mathscr{B}'$:

aussi : $ax^2 + 2bxy + cy^2 = X^T AX =$

Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, la conique a pour équation :

soit finalement : $(E) \Leftrightarrow \lambda x'^2 + \mu y'^2 + \alpha x' + \beta y' + f = 0 \quad (E')$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

V-2) Disparition de la partie linéaire par changement d'origine

Il s'agit ensuite de considérer des débuts d'identités remarquables :

Cas n° 1 : On suppose que $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$ ie $\lambda\mu = \det(A) = ac - b^2 \neq 0$

$(E') \Leftrightarrow$

aussi, quitte à travailler dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ où Ω avec les coordonnées $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ on a :

$$(E) \Leftrightarrow (E') \Leftrightarrow \lambda(x'')^2 + \mu(y'')^2 = \gamma \quad (E'') \text{ où } \gamma \in \mathbb{R}$$

On distingue alors deux possibilités :

- λ et μ ont le même signe ie $\lambda\mu = \det(A) > 0$: la conique est du genre ellipse éventuellement dégénérée.
  En effet :
  - si γ a le même signe que λ et μ, alors on obtient une équation réduite : $(E'') \Leftrightarrow \dfrac{(x'')^2}{a^2} + \dfrac{(y'')^2}{b^2} = 1$
  - si γ n'a pas le même signe que λ et μ, alors la conique est réduite à $\emptyset$
  - si $\gamma = 0$ alors la conique est réduite à $\{\Omega\}$

- λ et μ n'ont pas le même signe ie $\lambda\mu = \det(A) < 0$: la conique est du genre hyperbole éventuellement dégénérée.En effet :

  - si $\gamma \neq 0$ alors on obtient une équation réduite : $(E'') \Leftrightarrow \dfrac{(x'')^2}{a^2} - \dfrac{(y'')^2}{b^2} = \pm 1$

  - si $\gamma = 0$ alors on obtient une équation réduite : $\dfrac{(x'')^2}{a^2} - \dfrac{(y'')^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x''}{a} + \dfrac{y''}{b}\right)\left(\dfrac{x''}{a} - \dfrac{y''}{b}\right) = 0$

  La conique est la réunion de deux droites sécantes d'équation $\mathscr{D}_+ : \dfrac{x''}{a} + \dfrac{y''}{b} = 0$ et $\mathscr{D}_- : \dfrac{x''}{a} - \dfrac{y''}{b} = 0$

Cas n° 2 : On suppose que $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$ ie $\lambda\mu = \det(A) = ac - b^2 = 0$: la conique est du genre parabole

En procédant de la même manière, on obtient une nouvelle origine Ω et quitte à travailler dans le repère $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ avec les coordonnées $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\mu(y'')^2 + \alpha x'' = \gamma \quad (E''_a) \quad (\text{si } (\lambda = 0 \text{ et } \mu \neq 0) \qquad \text{ou} \qquad \lambda(x'')^2 + \beta y'' = \gamma \quad (E''_b) \quad \text{si } (\lambda \neq 0 \text{ et } \mu = 0)$$

et, quitte à changer une nouvelle fois d'origine et à travailler dans le repère $(\Omega_1; \vec{u}, \vec{v})$ avec les coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, on obtient :

$(E''_a) \Leftrightarrow 2px_1 = (y_1)^2$ (si $\alpha \neq 0$) ou $(E''_a) \Leftrightarrow (y_1)^2 = \delta$ ou $(E''_b) \Leftrightarrow 2py_1 = (x_1)^2$ (si $\beta \neq 0$) ou $(E''_b) \Leftrightarrow (x_1)^2 = \delta$

Les équations 1 et 3 conduisent bien à des paraboles.

Les équations 2 et 4 conduisent soit à $\varnothing$ (si $\delta < 0$), soit à une droite (si $\delta = 0$), soit à une réunion de deux droites parallèle (si $\delta > 0$)

Proposition : Classification des coniques

Soit une conique $\mathscr{C}$: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ dans le repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ ($(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) alors on lui associe la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ (Attention au coefficient antidiagonaux de A)

- si $\det A = ac - b^2 > 0$ (alors A aura deux valeurs propres non nulles de même signe) et $\mathscr{C}$ est du genre ellipse : c'est soit une ellipse, soit un point, soit l'ensemble vide
- si $\det A = ac - b^2 = 0$ (alors A a une valeur propre nulle et l'autre pas) et $\mathscr{C}$ est du genre parabole : c'est soit une parabole, soit une droite, soit une réunion de deux droites parallèles
- si $\det A = ac - b^2 < 0$ (alors A a deux valeurs propres non nulles de signe opposé) et $\mathscr{C}$ est du genre hyperbole : c'est soit une hyperbole, soit une réunion de deux droites sécantes, soit une seule droite, soit l'ensemble vide.

Remarques : on distingue *les coniques propres* (ellipse, parabole et hyperbole) des *coniques dégénérées.*
Les axes de symétries d'une conique propre sont dirigées par les vecteurs propres associées aux valeurs propres non nulles de la matrice A.

EXEMPLE N° 4 Le plan est munit d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé direct.
Identifier et préciser les éléments caractéristiques de la coniques $\mathscr{C}$ donner par :

1) $3x^2 + 4xy - 9 = 0$ 2) $x^2 + y^2 - 2xy + \varepsilon x + y = 0$ ($\varepsilon = \pm 1$) 3) $\frac{5}{2}(x^2 + y^2) - 3xy + \sqrt{2}(x + y) = 0$

VI) *Application à la recherche des extrema d'une fonction de deux variables*

Dans cette partie, on considère une application $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right]$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Si (x_0,y_0) est un point de $\mathbb{R}^2$ et $r>0$, on notera $\mathrm{B}\big((x_0,y_0),r\big)$ la boule ouverte de centre (x_0,y_0) et de rayon r.

Définition : extremum local, extremum global

On dit que $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right]$ où $\mathscr{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet un minimum (resp. un maximum) local en (x_0,y_0)

s'il existe $r>0$ avec : $\forall(x,y)\in\mathrm{B}\big((x_0,y_0),r\big),\quad f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$ (resp. $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$)

On dit que cet extremum (minimum ou maximum) est global lorsque l'inégalité est vérifiée sur $\mathscr{U}$ en totalité et plus seulement au voisinage de (x_0,y_0).

Remarque : Un extremum global est donc aussi un extremum local mais l'inverse n'est pas vrai.

VI-1) *Condition nécessaire à la présence d'un extremum local*

Définition : Point critique

Si $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right]$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$, on dit que le point (x_0,y_0) de $\mathscr{U}$ est un point critique de f lorsque $\quad\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(x_0,y_0)=\vec{0}\Leftrightarrow\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Proposition : Condition nécessaire à la présence d'un extremum local

Si (x_0,y_0) est un extremum local de $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right]$ où $\mathscr{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors (x_0,y_0) est un point critique de f

Les extrema (locaux ou globaux) sont donc à rechercher parmi les points critique de f

Remarques :

- On recherche les extrema sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Ce résultat est faux si l'extremum est situé sur un bord du domaine de définition.
- Ce n'est qu'une condition nécessaire ! Elle n'est pas suffisante autrement dit un point critique de f n'est pas toujours un extremum local. Dans ce cas, on dit que le point critique (x_0,y_0) est un point col.

  Contre-exemple : On considère $\left[f:(x,y)\mapsto x^2-y^2\right]$. Elle est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f=$

  Il y a donc un unique point critique en .
  Ce point critique n'est ni un minimum local car :
  ni un maximum local car :

VI-2) *Condition suffisante à la présence d'un extremum local*

Pour assurer une condition suffisante, on va demander plus de régularité à f.

Théorème : Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de 2 variables (ADMIS)

Si $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right]$ est une application de classe C^2 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$, elle possède un développement limité à l'ordre 2 en tout point (x_0,y_0) de $\mathscr{U}$ donné par :

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=&\,f(x_0,y_0)+h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right)+\underbrace{(h^2+k^2)\varepsilon(h,k)}_{o\left(\|(h,k)\|^2\right)}\text{ où }\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0\end{aligned}$$

Si on se place en un point critique, on obtient que :

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\underbrace{\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right)}_{=\mathrm{Q}(h,k)}+o\left(\|(h,k)\|^2\right)$$

Localement, le signe de $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ est donc celui de $\mathrm{Q}(h,k)$

Définition : Matrice Hessienne

Si $\left[f:\mathscr{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\right]$ est une application de classe C^2 sur l'ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$, on définit la matrice Hessienne de f en $(x_0,y_0)\in\mathscr{U}$ comme la matrice symétrique réelle donnée par :

$$\mathrm{H}_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

Le raisonnement qui suit est à savoir refaire au cas par cas selon les directives du programme :

Méthode : Étude d'un point critique avec la matrice hessienne pour la recherche d'extrema

Notons simplement ici $\mathrm{H}=\begin{pmatrix} r & s\\ s & t\end{pmatrix}$ la matrice Hessienne et on pose $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$ alors :

$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}\mathrm{X}=$

Comme la matrice Hessienne est une matrice symétrique réelle,
elle est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale : $\exists \mathrm{P}\in\mathrm{O}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}\mathrm{P}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}=\mathrm{D}$.

Dans la base de diagonalisation, si $\mathrm{X}'=\begin{pmatrix}h'\\k'\end{pmatrix}$ sont les nouvelles coordonnées, on a aussi : $\mathrm{X}=\mathrm{P}\mathrm{X}'$

et : $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}\mathrm{X}=$. Finalement, le signe de $\mathrm{Q}(h,k)$ est celui de $\lambda h'^2+\mu k'^2$

Il y a alors plusieurs situations possibles :

- si les deux valeurs propres sont strictement positives alors

- si les deux valeurs propres sont strictement négatives alors

- si les deux valeurs propres sont de signes opposés alors

- si l'une des valeurs propres est nulle alors on ne peut rien conclure.
  Dans ce cas, pour conclure, il faut directement travailler sur le signe de l'expression $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$.

En pratique, pour éventuellement pouvoir conclure, il nous faut seulement connaître le signe de λ et μ ce que l'on peut obtenir avec $\det\mathrm{H}=\lambda\mu$ et $\mathrm{tr}\mathrm{H}=\lambda+\mu$. La détermination de P n'est pas utile et serait une perte de temps...
On pourra conclure sur la nature d'un point critique parfois uniquement à l'aide du déterminant et de la trace de la matrice Hessienne sans avoir à refaire la totalité du raisonnement.

EXEMPLE N° 5 Chercher les extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$ de l'expression et dire s'ils sont globaux pour
1) $f(x,y)=x^2+y^2+x^3$ 2) $f(x,y)=x^2+xy+y^2+2x+3y$ 3) $f(x,y)=x^3+y^4-yx^2-xy^2$
Pas d'étude de globalité dans le 3)

Enfin, pour terminer, examinons la situation d'une recherche d'extrema sur une partie fermée et bornée.
On sait, en effet, qu'alors f possède un minimum et un maximum (global) si elle est continue.

EXEMPLE N° 6 Rechercher les extrema de f sur $\mathrm{D}=[0,1]^2$ lorsque $f(x,y)=x^2+2xy-2y^2+x+3y$