CHAPITRE X: SÉRIES ENTIÈRES

I) Généralités sur les séries entières

I-1) Définition et premiers exemples

Définitions : Séries entières

Une **série entière de la variable complexe** z notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ ou simplement $\sum a_n z^n$ s'il n'y a pas d'ambiguïté est une série de terme général $a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suites de nombres complexes appelés **coefficients de la série**.

Lorsque la suite des coefficients est réelle c'est à dire $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on restreint généralement l'étude de la série à la variable réelle et on préfère alors la notation $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ (resp. $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n$) où x (resp. t) est la variable réelle.

EXEMPLE N° 1

1. La série géométrique $\sum z^n$ est associée à la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n =$

On sait déjà que cette série converge lorsque et que sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n =$

2. La série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est associée à la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n =$

On reconnaît la série de l'exponentielle: elle converge et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} =$

3. La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{z^n}{n(n-1)}$ est associée à la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n =$

4. La série $\sum \dfrac{(-2)^n x^{2n}}{2n+1}$ est associée à la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n =$

Remarque : Toutes les sommes partielles d'une séries entières sont des expressions polynômiales.
Une expression polynômiale est une série entière où la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

I-2) Lemme d'Abel, rayon de convergence et somme d'une série entière

Théorème : Lemme d'Abel

Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$,
si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour $z_0 \in \mathbb{C}^*$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $z\in\mathbb{C}$ avec $|z| < |z_0|$.

Définition : Rayon de convergence

Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$, on appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ le nombre

$$\mathrm{R} = \sup\left\{ r\in\mathbb{R}_+ \;\middle|\; (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{est une suite bornée}\right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

C'est l'unique élément $\mathrm{R}\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tel que :

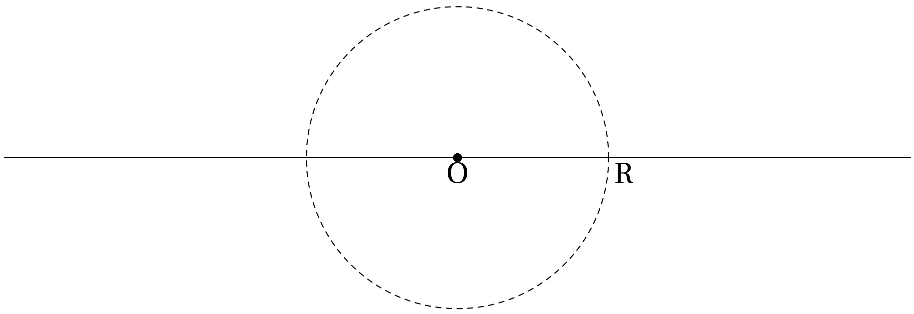
- si $|z| < \mathrm{R}$ alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente ;
- si $|z| > \mathrm{R}$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Remarque :

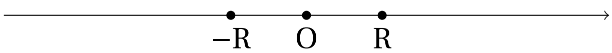
- $R = +\infty$ si et seulement si la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$
- $R = 0$ si et seulement si la série $\sum a_n z^n$ converge seulement pour $z = 0$

On peut utiliser ce résultat pour préciser la forme du domaine de convergence de la série entière :

$\boxed{\text{DISQUE OUVERT DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE } \sum a_n z^n \text{ DE RAYON DE CONVERGENCE R}}$



$\boxed{\text{INTERVALLE OUVERT DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE } \sum a_n x^n \text{ DE RAYON DE CONVERGENCE R}}$



Attention! On ne peut rien conclure sur la nature de la série pour $|z| = R$

EXEMPLE N° 2 Donner le domaine de définition de la fonction f de la variable réelle x où $\left[f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right]$

Définition : Fonction somme d'une série entière

Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R, on peut définir $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ si $|z| < R$

la fonction somme est $\left[\begin{array}{rcl} S : D(O,R) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & S(z) \end{array} \right]$ définie sur le disque ouvert $D(0,R)$ de convergence.

En restriction à la variable réelle, on définit la fonction somme sur l'intervalle ouvert $]-R,R[$ de convergence par :

$$\left[\begin{array}{rcl} S :]-R,R[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array} \right]$$

I-3) Calcul du rayon de convergence

Corollaire 1 : Majoration et minoration du rayon de convergence par convergence ponctuelle

Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$,

- Si z_1 est un complexe tel que $\sum a_n z_1^n$ converge alors $R \geqslant |z_1|$
- Si z_2 est un complexe tel que $\sum a_n z_2^n$ diverge alors $R \leqslant |z_2|$

On combine en général ce résultat avec la règle de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence.

SUITE EXEMPLE N° 1 Déterminer le rayon de convergence pour chacune des séries entières de l'exemple 1.

Corollaire 2 : Majoration et minoration du rayon de convergence par comparaison

Étant donnée des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayon de convergence respectifs R_a et R_b,
si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang alors $R_a \geqslant R_b$

Corollaire 3 : Rayon de convergence et relation o et O

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b,
si $a_n = O(b_n)$ (donc aussi si $a_n = o(b_n)$) , alors $R_a \geqslant R_b$

Corollaire 4 : Rayon de convergence et équivalent

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières,
si $|a_n| \sim_{+\infty} |b_n|$, alors les deux séries ont le même rayon de convergence.

Remarque : Il est donc aussi immédiat que $\sum a_n x^n$ et $\sum \dfrac{a_n}{n} x^n$ ont le même rayon de convergence.

Proposition Corollaire 5 : Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$

Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence

Proposition :

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum n^\alpha x^n$ a un rayon de convergence égale à 1

EXEMPLE N° 3 Déterminer le rayon de convergence des séries

$$1)\ \sum \frac{n^2+1}{n\sqrt{n}} x^n \qquad 2)\ \sum \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{1+n^2}\right) x^n \qquad 3)\ \sum \frac{\operatorname{Arctan}(n)}{n^{2023}} x^n$$

I-4) Opérations sur les séries entières

Proposition : Somme et multiplication par un scalaire de séries entière

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

- Pour tout scalaire λ non nul, $\sum \lambda a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R_a
- $\sum (a_n + b_n) z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$

Proposition : Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

Le produit de Cauchy de ces séries est une série entière $\sum c_n z^n$ où $c_n =$

Le rayon de convergence R de cette série vérifie

De plus, si $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n =$

II) Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Dans cette partie, on travaille avec une série entière réelle $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

On rappelle que sa somme $\left[f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right]$ a un domaine de définition D qui vérifie

autrement dit D est l'un des intervalles

Cet intervalle D à déterminer au cas par cas est l'intervalle de définition de la fonction somme f de la série entière.

Théorème de continuité de la somme d'une série entière (ADMIS)

La fonction somme d'une série entière est C^0 sur son intervalle de définition

Ce théorème assure la continuité de f au moins sur $]-R, R[$ mais aussi éventuellement l'un des bords R ou $-R$ à la seule condition que la somme de la série entière soit définie en ce bord. C'est une version « light » d'un théorème plus général appelé « théorème de continuité radial d'Abel »

Théorème : Dérivabilité terme à terme de la somme d'une série entière (ADMIS)

La somme f de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est dérivable sur l'intervalle ouvert de convergence.

La dérivée de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ obtenue en dérivant terme à terme.

Elle a le même rayon de convergence R que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et : $\forall x \in]-R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Corollaire : Caractère C^∞ de la somme d'une série entière

La somme f de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence.

Les dérivées successives s'obtiennent en dérivant successivement terme à terme :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-R; R[,\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

En particulier : $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) =$ autrement dit : $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k =$

Théorème : Intégration terme à terme

Si f est la somme d'une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R
alors on obtient une primitive F de f sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ en intégrant terme à terme la série entiière :

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[,\ \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ainsi, si $[a,b] \subset]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$: $\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n t^n \mathrm{d}t\right)$

EXEMPLE N° 4 Des exemples à connaître: Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n}$ et la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$

EXEMPLE N° 5 Soit la fonction f d'une variable réelle x définie par: $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{n-1}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f

2. Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles pour toutes les valeurs de x dans $]-1,1[$

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

III) Développement en série entière au voisinage de 0

III-1) Fonction développable en série entière au voisinage de 0

Définition : Fonction développable en série entière au voisinage de 0

• Une fonction $[f :]-r, r[\to \mathbb{K}]$ où $r > 0$ est dite développable en série entière sur $]-r, r[$
s'il existe une série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que : $\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

• Une fonction f de la variable complexe z est développable sur un disque ouvert de centre 0 de rayon r
s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ à coefficients complexes de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que :

$$\text{si } |z| < r \text{ alors } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Exemples :

- $[z \mapsto e^z]$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ car : $\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$
- $\left[z \mapsto \dfrac{1}{1-z}\right]$ est développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 de rayon 1 car :

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ avec } |z| < 1\ \ \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

- Liste des développements en séries entières des fonctions usuelles à connaître en partie IV

EXEMPLE N° 6 Déterminer les développement en série entière en 0 de f lorsque

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

2. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ *(On proposera deux (ou trois) méthodes)*

Proposition : Conditions nécessaires pour admettre un DSE en 0 sur les séries de Taylor

Si f est une fonction développable en série entière au voisinage de 0, alors

- f est de classe C^∞ au voisinage de 0
- le développement en série entière est uniquement déterminé par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

  La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est la série de Taylor associée à f.

Corollaire (important) : Unicité du développement en série entière

Si les fonctions sommes des séries entières $\left[x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right]$ et $\left[x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right]$ coïncident sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$

alors $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n$

Remarque : On a déjà rencontré les sommes partielles de la séries de Taylor en première année dans les formules de Taylor (inégalité de Taylor-Lagrange, formule de Taylor-Young et formule de Taylor).

Une fonction développable en série entière est forcément de classe C^∞ aussi on a la méthode classique :

Méthode : Prouver qu'une fonction est de classe C^∞ sur un intervalle centré en 0

Pour montrer qu'une fonction est de classe C^∞, on peut établir qu'elle est développable en série entière

EXEMPLE N° 7 Prouver que la fonction sinus cardinal d'expression $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$ se prolonge par continuité en une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Une fonction développable en série entière est C^∞ avec une série de Taylor qui converge mais

Attention ! Il ne s'agit que de conditions nécessaires (cf contre-exemple ci-dessous).

EXEMPLE N° 8

Un contre-exemple: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ sinon.

1. Démontrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pourra vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$

2. Quelle est la série de Taylor de f ? En déduire que f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

III-2) Développement en série entière et équations différentielles

La facilité avec laquelle on calcule facilement les dérivées d'une somme de série entière et l'unicité du développement conduit à chercher bien souvent une solution(particulière) d'une équation différentielle sous la forme d'une somme de série entière.

EXEMPLE N° 9 Déterminer les solutions développables en séries entière de $y'' + xy' + y = 0$ (E)

Méthode : Recherche de solution particulière développable en série entière en 0 pour une EDL

On considère une équation différentielle linéaire

$$y^{(p)} + \alpha_{p-1} y^{(p-1)} + \cdots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = b \text{ (E)}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ et b sont des fonctions développables en série entière en 0

On recherche les solutions développables en séries entières en 0 de la façon suivante

- Analyse : On suppose qu'il existe une solution y développable en série entière qu'on écrit

  $$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{où la série entière à un rayon de convergence } R > 0$$

  - on exprime les dérivées successives de y avec le théorème de dérivation terme à terme
  - on cherche un développement en série entière de chacun des membres de l'équation (E).
    S'il y a plusieurs somme, on commence par faire un changement d'indice pour avoir la même puissance de x dans chacune des sommes puis on réunit les parties communes sous une seule somme en isolant si besoin certains termes.
  - on identifie les coefficients en utilisant l'unicité du développement en série entière ce qui permet d'obtenir une relation de récurrence sur les coefficients

- Synthèse : On vérifie que les séries entières candidates possibles ont bien un rayon de convergence $R > 0$
  On peut souvent utiliser la règle de d'Alembert pour déterminer R (sans forcément expliciter les coefficients mais en exploitant la relation de récurrence)

  - Si on trouve $R = 0$, c'est qu'il n'y a pas de solution développable en série entière.
  - Si on trouve $R > 0$ alors on a obtenu des solutions développables en série entière solution de (E) sur $]-R, R[$
    En général, on cherche alors à expliciter les coefficients en exploitant la relation de récurrence afin de préciser l'expression de $y(x)$ pour reconnaître des fonctions usuelles.

EXEMPLE N° 10 En utilisant que $[x \mapsto e^x]$ est l'unique solution du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' = y \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$, retrouver le développement en série entière de la fonction exponentielle.

IV) Développements en série entière usuels

IV-1) Série géométrique and Co

En partant du développement de la série géométrique : $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour $|z| < 1$ (ie $\mathrm{R} = 1$)

on aussi : $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ pour $|x| < 1$ et en changeant de variable, en dérivant ou en intégrant :

$\dfrac{1}{1+x} =$

$\dfrac{1}{1+x^2} =$

$\dfrac{1}{(1-x)^2} =$

$-\ln(1-x) =$

$\ln(1+x) =$

$\operatorname{Arctan} x =$

IV-2) Série exponentielle and Co

En partant du développement de la série expoentielle : $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ (ie $\mathrm{R} = +\infty$)

On obtient :

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ pour tout } x \text{ réel d'où : } e^{-x} =$$

puis :

$\operatorname{ch} x =$

$\operatorname{sh} x =$

$\cos x =$

$\sin x =$

IV-3) Formule du binôme généralisé

Il s'agit de démontrer que : $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots\big(\alpha-(n-1)\big)}{n!} x^n$ pour $|x| < 1$

On veut déterminer l'existence d'un développement en série entière pour la fonction $\left[f : x \mapsto (1+x)^\alpha\right]$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pour cela, on recherche une équation différentielle vérifiée par f :
f est C^∞ sur et : $f'(x) =$ aussi

$$\left[f : x \mapsto (1+x)^\alpha\right] \text{ est donc l'unique solution du problème de Cauchy : } \begin{cases} (1+x)\,y' = \alpha y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

IV-4) Bilan des développements usuels à connaître

Développement	Rayon de convergence
$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$R = 1$
$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$	$R = 1$
$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots\big(\alpha-(n-1)\big)}{n!} x^n$	$R = 1$

SUITE EXEMPLE N° 8 Reconnaître la fonction développable solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + xy' + y = 0 \text{ (E)} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

ANNEXE : Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$), on a, pour tout $x \in [a,b]$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{=\mathrm{T}_n(f)(x)} + \underbrace{\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t}_{=\mathrm{R}_n(f)(x)}$$

$\mathrm{T}_n(f)(x)$ est l'expression de la somme partielle d'ordre n de la série de Taylor en a associée à f : c'est une expression polynômiale de degré n

$\mathrm{R}_n(f)(x)$ est le reste intégrale mesurant de façon exacte l'erreur commise lorsqu'on remplace $f(x)$ par la somme partielle précédente

Pour notre cours sur les séries entières, cette formule est utilisée avec $a = 0$ de sorte qu'elle s'écrit :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}_{=\mathrm{T}_n(f)(x)} + \underbrace{\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t}_{=\mathrm{R}_n(f)(x)}$$

On prouve le résultat par récurrence avec l'hypothèse :

HR_n : « Si f est de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ alors,

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{=\mathrm{T}_n(f)(x)} + \underbrace{\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t}_{=\mathrm{R}_n(f)(x)} \text{ »}$$

Initialisation : Pour $n = 0$, on prouve HR_0 donc on suppose que f est de classe C^1 et on montre que :

$$\forall x \in [a,b],; f(x) = \mathrm{T}_0(f)(x) + \mathrm{R}_n(f)(x) \quad \text{avec } \mathrm{T}_0(f)(x) = \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 = \frac{f(a)}{1} \times 1 = f(a)$$

$$\text{et } \mathrm{R}_0(f)(x) = \int_a^x f^{(0+1)}(t)\frac{(x-t)^0}{0!}\mathrm{d}t = \int_a^x f'(t) \times \frac{1}{1}\mathrm{d}t = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

Or : $\displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t = \left[f(t)\right]_a^x = f(x) - f(a)$ de sorte que l'égalité $f(x) = \mathrm{T}_0(f)(x) + \mathrm{R}_0(f)(x)$ est vraie.

Hérédité : Prouvons $\mathrm{HR}_n \Rightarrow \mathrm{HR}_{n+1}$. Pour prouver HR_{n+1}, on se donne f de classe C^{n+2} sur $[a,b]$.

Puisqu'elle est C^{n+2}, elle est aussi C^{n+1} et on peut lui appliquer HR_n de sorte que :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{=\mathrm{T}_n(f)(x)} + \underbrace{\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t}_{=\mathrm{R}_n(f)(x)}$$

On utilise alors une intégration par parties sur $\mathrm{R}_n(f)(x)$ avec

$$\begin{cases} u(t) = f^{(n+1)}(t) \\ v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!} = -\dfrac{1}{n!} \times h'(t) \times h(t)^n \text{ où } h(t) = x-t \end{cases} \text{d'où} \begin{cases} u'(t) = f^{(n+2)}(t) \\ v(t) = -\dfrac{1}{n!} \times \dfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1} = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 (puisque f est C^{n+2} donc $f^{(n+1)}$ est bien C^1).

$$\mathrm{R}_n(f)(x) = \int_a^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x - \int_a^x f^{(n+2)}(t) \times -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t$$

$$\text{soit : } \mathrm{R}_n(f)(x) = \underbrace{0}_{\text{car } n+1>0} + f^{(n+1)}(a) \times \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \underbrace{\int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t}_{\mathrm{R}_{n+1}(f)(x)}$$

Puisque $\mathrm{T}_n(f)(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \mathrm{T}_{n+1}(f)(x)$ on a bien obtenu : $f(x) = \mathrm{T}_{n+1}(f)(x) + \mathrm{R}_{n+1}(f)(x)$

ce qui prouve la formule à l'ordre $n+1$ et donc HR_{n+1} est vérifiée.

Conclusion : Par récurrence simple sur n, on sait que HR_n est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.