CHAPITRE I: FONCTIONS VECTORIELLES ET COURBES PLANES PARAMÉTRÉES

Dans tout le chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Une courbe dans le plan (ou dans l'espace) est un ensemble de points identifiés à l'aide d'une représentation i.e. des équations qui permettent de savoir si un point appartient ou n'appartient pas à la courbe.

Par exemple, pour une droite du plan dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, vous avez rencontré en PTSI deux modes de représentation :

- la représentation paramétrique :

- la représentation cartésienne :

Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées d'équation cartésienne réduite est aussi une représentation graphique i.e.

De manière analogue, une courbe plane Γ peut être identifier dans le plan

- par une représentation cartésienne c'est à dire une relation entre les coordonnées cartésiennes des points de Γ
  Les courbes représentatives sont un cas particulier de courbes décrit par une représentation cartésienne :
  la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction $[f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}]$ est la courbe d'équation cartésienne
- par une représentation paramétrique c'est à dire que les coordonnées des points de la courbe Γ sont données comme des fonctions d'un paramètre (souvent t) autrement dit $\boxed{\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in \mathrm{I}}$

  L'objectif de ce chapitre est d'apprendre à reconnaître, à étudier et à tracer une courbe donnée par une représentation paramétrique qu'on appelle plus simplement une courbe paramétrée.

  De façon naturelle, une courbe paramétrée est associée à une fonction vectorielle $\left[\begin{array}{rcl} \vec{f} : \mathrm{I} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & f(t) = \big(x(t), y(t)\big) \end{array}\right]$
  et il convient donc de préciser d'abord quelques propriétés des fonctions vectorielles.

I) *Fonctions vectorielles d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$*

I-1) *Introduction à la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$*

Définitions : Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces euclidiens réel c'est à dire que
  $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ possède une structure de $\mathbb{R}$ev réel qu'on peut munir d'un produit scalaire
  $$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall u' = (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad u.u' = xx' + yy'$$
  $$\forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \forall u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3, \quad u.u' = xx' + yy' + zz'$$
- La norme associée, qu'on appelle la norme euclidienne, est définie, pour tout vecteur u par $\|u\| = \sqrt{u.u}$
  $$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \forall u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \|u\| = \sqrt{u.u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
- Cette norme permet alors de mesurer dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ les distances :
  la distance euclidienne est définie, pour des vecteurs u et u', par $d(u, u') = \|u - u'\|$

Définitions : Boule ouverte et boule fermée, partie ouverte et partie fermée, partie bornée

Si $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$ est munit de sa structure euclidienne usuelle, on considère un vecteur a de E (càd $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ si $E = \mathbb{R}^2$ ou $a = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ si $E = \mathbb{R}^3$) et une partie A de E (càd $A \subset E$)

- la boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ est la partie de E définie par : $B(a, r) = \{u \in E \mid \|u - a\| < r\}$
- la boule fermée de centre a et de rayon $r >$ est la partie de E définie par : $\overline{B}(a, r) = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|u - a\| \leqslant r\}$
- on dit que la partie A est bornée lorsqu'il existe $M > 0$ tel que $A \subset B(0_E, M)$ (où $\begin{cases} 0_E = (0, 0) \text{ si } E = \mathbb{R}^2 \\ 0_E = (0, 0, 0) \text{ si } E = \mathbb{R}^3 \end{cases}$)
- on dit que la partie A est ouverte lorsque, pour tout $u \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(u, \varepsilon) \subset A$
- on dit que la partie A est fermée lorsque $E - A$ est une partie ouverte

EXEMPLE N° 1 Démontrer que:

1. le carré $C = [0, 2] \times [-2, 0]$ est une partie bornée qui n'est pas ouverte

2. le demi-plan $Q_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ est une partie ouverte qui n'est pas bornée.

3. $\emptyset$ est une partie ouverte et fermée (ce qui est plus étonnant !)

Définitions : Point intérieur et adhérent à une partie.

Si $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$ est munit de sa structure euclidienne usuelle, on considère une partie A de E (càd $A \subset E$)

- un point a de E est un point intérieur à A s'il existe $r > 0$ avec $B(a, r) \subset A$

  Remarque : un point a de E *est un point extérieur à* A *s'il est à l'intérieur de* $E - A$
- un point a de E est un point adhérent à A si toute boule ouverte centrée en a rencontre A

  Remarque : Les points de A *sont forcément des points adhérents...mais il peut y avoir des points adhérents à* A *qui ne sont pas dans* A

SUITE EXEMPLE N° 1 Pour C et Q_+, préciser les points à l'intérieur, les points adhérents et les points à l'extérieur.

Un "bon" schéma suffira pour justifier les réponses

I-2) Définition

Définition : Fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

- On appelle fonction vectorielle une fonction $\vec{f} : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) soit, pour tout réel t de I :

$$\vec{f}(t) = \big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2 \text{ parfois noté aussi } \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \left(\text{(resp. } \vec{f}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) \in \mathbb{R}^3 \text{ ou } \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right)$$

- Les fonctions x, y (ou z) définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont appelés les fonctions coordonnées de $\vec{f}$.
- Si $\vec{f}$ est donnée uniquement par son expression, il est clair que le domaine de définition est

$$\mathrm{D}_{\vec{f}} = \mathrm{D}_x \cap \mathrm{D}_y \left(\text{resp } \mathrm{D}_{\vec{f}} = \mathrm{D}_x \cap \mathrm{D}_y \cap \mathrm{D}_z \right) \quad \text{où } \mathrm{D}_g \text{ est le domaine de définition de la fonction } g$$

- Pour étudier une fonction vectorielle, il sera pertinent de chercher des périodicités et des symétries qui permettront de limiter l'étude à un domaine d'étude.

La notation $\vec{f}$ est temporaire pour démarrer : nous noterons plus simplement f et c'est le contexte qui permettra de savoir que c'est une fonction vectorielle et pas une fonction réelle.

I-3) Limites et continuité

Définitions : Limites et continuité d'une fonction vectorielle

Si $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et si $\left[\vec{f} : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathrm{E}\right]$ est une fonction vectorielle

- Si $t_0 \in \mathrm{I}$ et $\vec{\ell} \in \mathrm{E}$ alors $\vec{f}$ a pour limite $\vec{\ell}$ lorsque t tend vers t_0 qu'on note $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{\ell}$

  lorsque : $\|\vec{f}(t) - \vec{\ell}\| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0 \Leftrightarrow$ les fonctions coordonnées admettent une limite lorsque t tend vers t_0

  De plus, si $\vec{\ell} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (resp. $\vec{\ell} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$), $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{\ell} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \alpha \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \beta \end{cases} \left(\text{resp } \begin{cases} \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \alpha \\ \lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \beta \\ \lim\limits_{t \to t_0} z(t) = \gamma \end{cases} \right)$

- Si $t_0 \in \mathrm{D}_{\vec{f}}$, $\vec{f}$ est continue en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$

  ce qui est équivalent à dire que les fonctions coordonnées de $\vec{f}$ sont continues en t_0
- $\vec{f}$ est continue sur l'intervalle I si $\vec{f}$ est continue en tout point de I

  ce qui est équivalent à dire que les fonctions coordonnées de $\vec{f}$ sont continues sur I
- Si $\vec{f}$ est C^0 sur I et que t_0 est un réel qui est une extrémité de I mais qui n'est pas dans I,
  on dira que $\vec{f}$ admet un prolongement par continuité en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t)$ existe et on pose alors : $\vec{f}(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t)$

I-4) Dérivation et classe C^n

Définitions : Vecteur dérivée et fonction dérivée

Si $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et si $\left[\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to E\right]$ est une fonction vectorielle

- S'il existe $\varepsilon > 0$ avec $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\subset I$, on dit que $\vec{f}$ est dérivable en t_0 si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$ existe

  ce qui est équivalent à dire que les fonctions coordonnées sont dérivables en t_0

  On note alors $\vec{f}'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0} \in E$ le vecteur dérivée de $\vec{f}$ en t_0

  et on a : $\vec{f}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ si $E = \mathbb{R}^2$ $\left(\text{resp. } \vec{f}'(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \text{ si } E = \mathbb{R}^3\right)$

  Remarque : on pourrait définir la notion de vecteur dérivé à droite (resp à gauche) en considérant la limite pour $t \to t_0^+$ càd $t \to t_0$ avec $t > t_0$ (resp $t \to t_0^-$ càd $t \to t_0$ avec $t < t_0$)

- Si $\vec{f}$ est dérivable sur I i.e. qu'elle est dérivable en tout point de I,

  on définit la dérivée de $\vec{f}$ comme la fonction vectorielle $\left[\vec{f}' : t \mapsto \vec{f}'(t)\right]$

Définitions : Dérivées successives, classe C^n où $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Si $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et si $\left[\vec{f} : I \subset \mathbb{R} \to E\right]$ est une fonction vectorielle, on définit alors de façon récursive :

- si $n = 0$, $\vec{f}$ est C^0 sur I si $\vec{f}$ est continue sur I et $\vec{f}^{(0)} = \vec{f}$
- si $n = 1$, $\vec{f}$ est C^1 sur I si $\vec{f}$ est dérivable sur I et si $\vec{f}'$ est continue sur I et alors $\vec{f}^{(1)} = \vec{f}'$
- si $n \geqslant 2$, $\vec{f}$ est de classe C^n sur I si $\begin{cases} f \text{ est de classe } C^{n-1} \text{ sur I} \\ \vec{f}^{(n-1)} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur I} \end{cases}$ et $\vec{f}^{(n)} = \left(\vec{f}^{(n-1)}\right)'$ ce qui revient à vérifier que

  les fonctions coordonnées sont de classe C^n sur I et on a : $f^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} x^{(n)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix}$ $\left(\text{resp. } f^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} x^{(n)}(t) \\ y^{(n)}(t) \\ z^{(n)}(t) \end{pmatrix}\right)$

- si $n = +\infty$, $\vec{f}$ est de classe C^∞ sur I si elle est de classe C^k pour tout entier naturel k

  ce qui revient à vérifier que les fonctions coordonnées sont de classe C^∞ sur I.

Propositions : Opérations sur la dérivation

Soient $\vec{f}$ et $\vec{g}$ des fonctions vectorielles C^1 (resp. dérivable) sur I, alors

- (Combinaison linéaire) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha\vec{f} + \vec{g}$ est C^1 (resp. dérivable) sur I et : $\left(\alpha\vec{f} + \vec{g}\right)' =$
- (Produit avec une fonction numérique)

  Si $[\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}]$ est C^1 (resp. dérivable) sur I alors $\alpha\vec{f}$ est C^1 (resp. dérivable) sur I et $(\alpha\vec{f})' =$
- (Produit scalaire) $\left[\vec{f}.\vec{g} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$ est C^1 (resp. dérivable) sur I et $\left(\vec{f}.\vec{g}\right)' =$
- (Produit vectoriel) Si $E = \mathbb{R}^3$, $\left[\vec{f} \wedge \vec{g} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\right]$ est C^1 (resp. dérivable) sur I et $\left(\vec{f} \wedge \vec{g}\right)' =$

  Attention au SENS des produits que vous écrivez!

  où si $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ alors

  $(\vec{f}.\vec{g})(t) = \vec{f}(t).\vec{g}(t) =$ et $(\vec{f} \wedge \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \wedge \vec{g}(t) =$

Propositions : Linéarité de la dérivation et Formules de Leibniz

Soient $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ des fonctions vectorielles C^n sur I où $n \in \mathbb{N}$, alors

- (Combinaison linéaire) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ est C^n sur I et : $\left(\alpha\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}\right)^{(n)} =$
- (Produit avec une fonction numérique)

  Si $[\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}]$ est C^n sur I alors $\alpha\overrightarrow{f}$ est C^nsur I et $(\alpha\overrightarrow{f})^{(n)} =$

- (Produit scalaire) $\left[\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}\right]$ est C^n sur I et $\left(\overrightarrow{f}.\overrightarrow{g}\right)^{(n)} =$

- (Produit vectoriel) Si $E = \mathbb{R}^3$, $\left[\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\right]$ est C^n sur I et $\left(\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}\right)^{(n)} =$

Attention au SENS des produits que vous écrivez!

Proposition : Composition $\overrightarrow{f} \circ \alpha$

Soit $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} [\overrightarrow{f} : I \subset \mathbb{R} \to E] \text{est une fonction vectorielle } C^1 \text{ sur I} \\ [\alpha : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}] \text{est une fonction } C^1 \text{ sur J} \\ \alpha(J) \subset I \quad \text{ou } (\forall t \in J,\ \alpha(t) \in I) \end{cases}$ $\Rightarrow \left[\overrightarrow{f} \circ \alpha :\ J \subset E\right]$ est de classe C^1 sur J

et $\left(\overrightarrow{f} \circ \alpha\right)' =$

EXEMPLE N° 2 Si $\left[\overrightarrow{f} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\right]$ est de classe C^1 et ne s'annulant pas, prouver que

$\|\overrightarrow{f}\|$ est constante sur I $\Leftrightarrow \forall t \in I$, $\overrightarrow{f}(t)$ et $\overrightarrow{f}'(t)$ sont orthogonaux

I-5) Formule de Tayloy-Young et développement limité

Théorème : Formule de Taylor-Young pour les fonctions vectorielles

Si $\overrightarrow{f}$ est une fonction vectorielle de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) au voisinage de t_0,
on peut appliquer la formule de Taylor-Young en t_0 à l'ordre n à chacune des fonctions coordonnées de $\overrightarrow{f}$
Par exemple, si $\overrightarrow{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ alors :

qu'on peut écrire sous forme vectorielle en faisant intervenir les dérivées successives de $\overrightarrow{f}$:

Remarque : on peut bien sûr écrire ce développement à l'aide du changement de variable $t = t_0 + h$

Définition et proposition : Développement limité

Si $\overrightarrow{f}$ est une fonction vectorielle définie au voisinage du réel t_0,

- on dit que $\overrightarrow{f}$ admet un développement limité à l'ordre n en t_0 s'il existe des vecteurs $\overrightarrow{v}_0, \overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_n$ de E avec
$$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{v}_0 + (t-t_0)\overrightarrow{v}_1 + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\overrightarrow{v}_n + (t-t_0)^n \overrightarrow{\varepsilon}(t) \text{ avec } \lim_{t \to t_0} \overrightarrow{\varepsilon}(t) = \overrightarrow{0}$$
$$\text{ou bien : } \quad \overrightarrow{f}(t_0+h) = \overrightarrow{v}_0 + h\overrightarrow{v}_1 + \cdots + \frac{h^n}{n!}\overrightarrow{v}_n + h^n \overrightarrow{\varepsilon}(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \overrightarrow{\varepsilon}(h) = \overrightarrow{0}$$
ce qui revient en pratique à vérifier que les fonctions coordonnées admettent toutes un développement limités à l'ordre n en t_0 et à réécrire les résultats sous une forme vectorielle.
- Si $\overrightarrow{f}$ est de classe C^n au voisinage de t_0 alors la formule de Taylor-Young fournit un développement limité de $\overrightarrow{f}$ à l'ordre n en t_0.
- Par unicité des développements limités, on peut donc identifier les dérivées successives de $\overrightarrow{f}$ en t_0 en identifiant un développement limité avec la formule de Taylor-Young.

EXEMPLE N° 3 Déterminer un $DL_3(0)$ de $\overrightarrow{f}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ \dfrac{1}{1+t} \end{pmatrix}$ et identifier $\overrightarrow{f}^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0,3]\!]$

II) Courbes paramétrées du plan

Dans la suite, le plan usuel est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ et on convient de confondre le point M de coordonnées (x, y) dans $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ avec le couple (x, y) de sorte qu'on notera $M = (x, y)$.

II-1) Définitions et premiers exemples

Définitions et notations : Courbe paramétrée

Si $\left[\begin{array}{ccc} f : I \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & M(t) = (x(t), y(t)) \end{array}\right]$ est une fonction vectorielle de classe C^1 sur I,

l'ensemble $\Gamma = \{M(t) \mid t \in I\}$ est alors la courbe paramétrée par la fonction $\vec{f}$

Le point $M(t)$ est appelé le point de paramètre t de la courbe Γ. En pratique, une courbe paramétrée est souvent définie par une représentation paramétrique $\boxed{\Gamma : \left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right. ,\ t \in I}$ et on peut alors facilement définir la fonction vectorielle associée notée simplement f (plutôt que $\vec{f}$) s'il n'y a pas d'ambiguïté.

EXEMPLE N° 4

1. Proposer une représentation paramétrique de la courbe et expliciter la fonction vectorielle associée pour

- **a.** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I(0, 1)$ et de rayon 3
- **b.** $\mathscr{H}$ est la branche d'hyperbole $xy = 1$ où $x > 0$
- **c.** $\mathcal{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur I

2. Identifier la courbe $\left\{\begin{array}{l} x = 3\cos(4t) \\ y = 1 + 3\sin(4t) \end{array}\right. ,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Il y a différents paramétrages pour une même courbe paramétrée.
Une courbe paramétrée représente le mouvement d'un point mobile et pas seulement un tracé.

INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE

On interprète une courbe paramétrée comme le mouvement d'un point mobile $M(t)$ en fonction du temps t

- le point $M(t)$ est
- la courbe Γ est
- le vecteur $f'(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ est
- si la fonction vectorielle est de classe C^2, le vecteur $f''(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ est

VISUALISATION D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE AVEC PYTHON

Écrire une suite d'instruction en Python permettant de tracer la cardioïde $\left\{\begin{array}{l} x(t) = \dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \\ y(t) = \dfrac{4t}{(1+t^2)^2} \end{array}\right. ,\ t \in [-10, 10]$

II-2) Tangente

Définitions : Tangentes

Soit Γ une courbe paramétrée associée à la fonction vectorielle $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{M}(t) = (x(t), y(t)) \end{array}\right]$

et soit $\mathrm{M}(t_0) = f(t_0)$ un point de cette courbe,

- on dit que Γ possède une tangente en $\mathrm{M}(t_0)$ lorsque
  les sécantes $\big(\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t)\big)$ admettent une position limite lorsque t tend vers t_0 (càd lorsque $\mathrm{M}(t)$ tend vers $\mathrm{M}(t_0)$)
  ou autrement dit

  si $\overrightarrow{u}(t)$ est un vecteur directeur de la sécante $\big(\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t)\big)$ soit $\big(\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t)\big) = \mathrm{M}(t_0) + \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{u}(t)\big)$ alors

  $$\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{u}(t) = \overrightarrow{u} \text{ existe et } \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$$

  La tangente à Γ en $\mathrm{M}(t_0)$ est alors la droite $\mathscr{T}_0 = \mathrm{M}(t_0) + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$

Remarque : lorsqu'il n'y a pas de limites mais qu'il existe une limite à droite (resp. à gauche) càd lorsque t tend vers t_0 avec $t > t_0$ (resp. $t < t_0$), on parle de demi-tangente.

Définitions : Point régulier et stationnaire, courbe régulière

Soit Γ une courbe paramétrée associée à la fonction vectorielle $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{M}(t) = (x(t), y(t)) \end{array}\right]$ de classe C^1 sur I et soit $\mathrm{M}(t_0) = f(t_0)$ un point de cette courbe,

- on dit que $\mathrm{M}(t_0)$ est un point régulier de Γ lorsque $f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.
- on dit que $\mathrm{M}(t_0)$ est un point stationnaire de Γ lorsque $f'(t_0) = \overrightarrow{0}$ (On parle aussi de point singulier)
- on dit que la courbe Γ est régulière lorsque tous les points de Γ sont réguliers.

Proposition : Tangente en un point régulier

Soit Γ une courbe associée à la fonction vectorielle $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{M}(t) = (x(t), y(t)) \end{array}\right]$ de classe C^1 sur I

Si $\mathrm{M}(t_0) = f(t_0)$ un point régulier de cette courbe (ainsi $f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$)
alors la courbe Γ admet une tangente au point $\mathrm{M}(t_0)$ qui est dirigée par le vecteur $f'(t_0)$

La tangente à Γ en $\mathrm{M}(t_0)$ est donc la droite $\mathscr{T}_0 = \mathrm{M}(t_0) + \mathrm{Vect}(f'(t_0))$

SUITE EXEMPLE N° 3 On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \mathrm{sh}\, t \\ y(t) = \dfrac{1}{1+t} \end{cases}, t \in]-1, 1[$

Justifier que le point de paramètre $t = 0$ est régulier et préciser une équation cartésienne de la tangente en ce point.

EXEMPLE DES COURBES REPRÉSENTATIVES

On considère une courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction $[g : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}]$ de classe C^1 sur I

Une représentation paramétrique de $\mathscr{C}_g$ est : associée à fonction

Cette fonction vectorielle est de classe avec

On peut donc conclure que tous les points de $\mathscr{C}_g$ sont

Si $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ est un point de $\mathscr{C}_g$, alors M_0 est le point de paramètre de sorte $\mathscr{C}_g$ admet une tangente en M_0 qui est la droite . On obtient alors une équation cartésienne de $\mathscr{C}_g$:

On retrouve donc la formule donnant une équation de tangente à $\mathscr{C}_g$ rencontrée dans le secondaire.

Proposition : Tangente en un point stationnaire

Soit Γ une courbe paramétrée associé à la fonction vectorielle $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{M}(t) \end{array}\right]$ de classe C^∞ sur I

Si $\mathrm{M}(t_0) = f(t_0)$ un point stationnaire de cette courbe (ainsi $f'(t_0) = \dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \overrightarrow{0}$) alors

on recherche la première dérivée non nulle $f^{(p)}(t_0) = \dfrac{d^p\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$ dans la suite des dérivées successives de f en t_0

$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid k \geqslant 2 \text{ et } f^{(k)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}\right\}$$

Si elle existe, alors Γ possède une tangente en $\mathrm{M}(t_0)$ dirigée par $f^{(p)}(t_0)$ c'est donc la droite $\mathrm{M}(t_0) + \mathrm{Vect}\left(f^{(p)}(t_0)\right)$

Notre sécante $\left(\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t)\right)$ est toujours dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t)} = \begin{pmatrix} y(t) - y(t_0) \\ x(t) - x(t_0) \end{pmatrix} = f(t) - f(t_0)$

Comme f est C^∞ au voisinage de t_0, on peut utiliser un $\mathrm{DL}_p(0)$:

$$f(t) = f(t_0) + \underbrace{(t - t_0)f'(t_0) + \cdots + \frac{(t - t_0)^{p-1}}{(p-1)!}f^{(p-1)}(t_0)}_{=\overrightarrow{0}} + \frac{(t - t_0)^p}{p!}f^{(p)}(t_0) + \begin{pmatrix} o\left((t - t_0)^p\right) \\ o\left((t - t_0)^p\right) \end{pmatrix}$$

puisque par définition $f^{(p)}(t_0)$ est la première dérivée non nulle

Par colinéarité, on obtient un autre vecteur directeur de la sécante $\left(\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t)\right)$ admettant une position limite :

$$\overrightarrow{u}(t) = \frac{p!}{(t - t_0)^p}\overrightarrow{\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t)} = \frac{p!}{(t - t_0)^p}\left(f(t) - f(t_0)\right) = f^{(p)}(t_0) + \begin{pmatrix} o(1) \\ o(1) \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to t_0]{} f^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$$

ce qui amène à la conclusion attendue : la tangente est bien dirigée par le vecteur $f^{(p)}(t_0)$

Méthode : déterminer la tangente en $\mathrm{M}(t_0)$ à la courbe $\Gamma : \left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

On commence par déterminer la nature du point $\mathrm{M}(t_0)$: on vérifie que $f : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est de classe C^1 au voisinage de t_0 et on calcule $f'(t_0)$:

- si $f'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ alors $\mathrm{M}(t_0)$ est un point régulier et la tangente est $\mathscr{T}_0 = \mathrm{M}(t_0) + \mathrm{Vect}\left(f'(t_0)\right)$
- si $f'(t_0) = \overrightarrow{0}$ alors $\mathrm{M}(t_0)$ est un point stationnaire et on utilise pour un développement limité de f en t_0 pour déterminer la première dérivée $f^{(p)}(t_0)$ non nulle en t_0 en identifiant le DL à la formule de Taylor-Young.
  La tangente en $\mathrm{M}(t_0)$ est alors $\mathscr{T}_0 = \mathrm{M}(t_0) + \mathrm{Vect}\left(f^{(p)}(t_0)\right)$

EXEMPLE N° 5 On considère la courbe paramétrée $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \cos(t^2) \\ y(t) = \dfrac{t^4}{1+t^2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Justifier que le point de paramètre $t = 0$ est stationnaire et déterminer une équation cartésienne de la tangente en ce point.

QUE FAIRE SI LES DEUX PROPOSITIONS PRÉCÉDENTES NE S'APPLIQUENT PAS ?

On vous demande de préciser une tangente mais le point n'est pas régulier et, par exemple, le calcul des dérivées successives de f n'est pas possible (ou pas simple). On peut alors revenir à la définition de la tangente :

on cherche une limite à un vecteur directeur de la sécante $\left(\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t)\right)$

or $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ m(t) \end{pmatrix}$ où $m(t) = \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ est la pente de la sécante convient.

Aussi, si $\lim\limits_{t \to t_0} m(t) = m \in \mathbb{R}$ existe, alors la courbe possède une tangente en $\mathrm{M}(t_0)$ dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

Remarque : si $m(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$, on peut conclure à une tangente verticale.

EXEMPLE N° 6 On revient sur l'exemple de la Cardioïde $\mathscr{C} : \begin{cases} x(t) = \dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \\ y(t) = \dfrac{4t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$

1. Montrer que le point $\mathrm{M}(t)$ de paramètre t tend lorsque t tend vers $+\infty$ vers un point limite M_∞ dont on précisera les coordonnées.

2. En considérant ce point M_∞ comme appartenant à la courbe, préciser une équation cartésienne la demi-tangente en ce point.

II-3) Étude locale en un point stationnaire

Propositions et définitions : Point d'inflexion et point de rebroussement

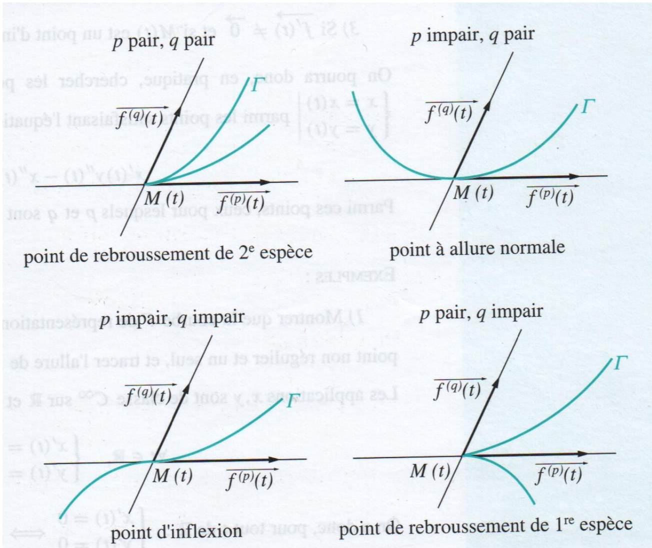
Soit Γ une courbe paramétrée associé à la fonction vectorielle $\begin{bmatrix} f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{M}(t) \end{bmatrix}$ de classe C^∞ sur I,

et soit $\mathrm{M}(t_0)$ le point de paramètre t_0 de Γ,

Pour étudier localement l'allure du point $\mathrm{M}(t_0)$, on recherche dans la suite des dérivées successives de f :

- le plus petit entier naturel p non nul tel que $f^{(p)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ (Si $\mathrm{M}(t_0)$ est régulier, $p = 1$, sinon $p \geqslant 2$)
- le plus petit entier naturel q non nul plus grand que p tel que $f^{(q)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$

Il y a alors au voisinage de $\mathrm{M}(t_0)$ quatre allures possibles



DÉMONSTRATION On applique la formule de Taylor-Young à f à l'ordre q :

$$f(t) = f(t_0) + \underbrace{(t-t_0)f'(t_0) + \dots \frac{(t-t_0)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(t_0)} + \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0)$$

$$+ \underbrace{\frac{(t-t_0)^{p+1}}{(p-1)!} f^{(p+1)}(t_0) + \dots + \frac{(t-t_0)^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q-1)}(t_0)} + \frac{(t-t_0)^q}{q!} f^q(t_0) + \begin{pmatrix} o\big((t-t_0)^q\big) \\ o\big((t-t_0)^q\big) \end{pmatrix}$$

de sorte que : $f(t) - f(t_0) = \left(\dfrac{(t-t_0)^p}{p!} + o\big((t-t_0)^p\big)\right) f^{(p)}(t_0) + \left(\dfrac{(t-t_0)^q}{q!} + o\big((t-t_0)^q\big)\right) f^{(q)}(t_0)$

Comme $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ ne sont pas colinéaires, on peut travailler dans le repère du plan $\left(\mathrm{M}(t_0); f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0)\right)$

La formule de Tayloy-Young appliquée précédemment nous permet de connaître les coordonnées $(\mathrm{X}(t), \mathrm{Y}(t))$ du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}(t_0)\mathrm{M}(t)}$ dans ce repère et on a :

$$\mathrm{X}(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o\big((t-t_0)^p\big) \sim_{t_0} \frac{(t-t_0)^p}{p!} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y}(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o\big((t-t_0)^q\big) \sim_{t_0} \frac{(t-t_0)^q}{q!}$$

Les équivalents donnent le signe au voisinage de t_0 ce qui permet de positionner localement le point $\mathrm{M}(t)$.

La courbe admet dans tous les cas le vecteur $f^{(p)}(t_0)$ comme directeur de la tangente. Par exemple :

$\begin{cases} p \text{ pair} \\ q \text{ impair} \end{cases}$ entraîne $\begin{cases} \mathrm{X}(t) > 0 \\ \mathrm{Y}(t) < 0 \end{cases}$ si $t < t_0$ et $\begin{cases} \mathrm{X}(t) > 0 \\ \mathrm{Y}(t) > 0 \end{cases}$ si $t > t_0$ qui conduit au rebroussement de 1er espèce

Le programme impose l'utilisation des développements limités pour mener une étude locale

EXEMPLE N° 7 Préciser l'allure du point de paramètre $t = 0$ pour la courbe $\Gamma : \begin{cases} x(t) = \ln(1+t^4) \\ y(t) = \mathrm{ch}(t^2) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

II-4) Branches infinies

Définition : Branche infinie

Soit Γ une courbe paramétrée associé à la fonction vectorielle $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{M}(t) \end{array}\right]$

et soit $t_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une extrémité de I,

la courbe possède une branche infinie en t_0 lorsque $\lim\limits_{t \to t_0} \|\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}\| = +\infty$ (éventuellement en t_0^+ ou t_0^- si $t_0 \in \mathbb{R}$)

autrement dit lorsque l'une au moins des coordonnées $x(t)$ ou $y(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers t_0

Pour les calculs de limites, il est attendu des étudiants qu'ils utilisent les outils mis à leurs dispositions en PTSI à savoir les équivalents et les DL.

Proposition : Étude d'une branche infinie si une seule des deux coordonnées part à l'infinie

- $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty \\ y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors la courbe Γ possède une asymptote

  et on peut, en précisant les limites, préciser l'allure. Exemple : 1) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} -\infty \\ y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} 2^+ \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty \\ y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} 1^- \end{cases}$

- $\begin{cases} y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty \\ x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors la courbe Γ possède une asymptote

  et on peut, en précisant les limites, préciser l'allure. Exemple : 1) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} -1^+ \\ y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} -2^- \\ y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} -\infty \end{cases}$

Proposition : Étude d'une branche infinie si les deux coordonnées partent à l'infinie

On suppose cette fois que $x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \infty$ et $y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \infty$ et on étudie alors la limite $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$:

- si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$: on dit que la courbe Γ possède une branche parabolique dans la direction de l'axe $\mathrm{O}+\mathrm{Vect}(\overrightarrow{j})$

  Exemples : 1) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} -\infty \\ y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} -\infty \end{cases}$

- si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$: on dit que la courbe Γ possède une branche parabolique dans la direction de l'axe $\mathrm{O}+\mathrm{Vect}(\overrightarrow{i})$

  Exemples : 1) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} -\infty \\ \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} 0 \end{cases}$

- si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = m \in \mathbb{R}$ alors on étudie $\lim\limits_{t\to t_0} \Big(y(t) - mx(t)\Big)$ et

  - si $\lim\limits_{t\to t_0} \Big(y(t)-mx(t)\Big) = p \in \mathbb{R}$ alors on dit que la courbe possède une asymptote (oblique) d'équation $y = mx+p$

    Exemples : 1) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} 2 \\ y(t)-2x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} -1^+ \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} -\infty \\ y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} -1 \\ y(t)+x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 3^- \end{cases}$

  - si $\lim\limits_{t\to t_0} \Big(y(t) - mx(t)\Big) = \pm\infty$ alors on dit que la courbe possède une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = mx$

    Exemples : 1) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} 2 \\ y(t)-2x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} -\infty \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} -\infty \\ y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \\ \frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} -1 \\ y(t)+x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty \end{cases}$

Remarque :

- On peut préciser la position de Γ par rapport à son asymptote $\mathscr{D}: \ y = mx + p$ en recherchant un équivalent en t_0 de $y(t) - mx(t) - p$
- Selon le contexte, il peut arriver, qu'à l'aide d'un développement asymptotique, on obtienne
  $\exists(m,p) \in \mathbb{R}^2, \ y(t) - mx(t) - p = o(1)$ voir $y(t) - mx(t) - p = \dfrac{k}{t^p} + o\left(\dfrac{1}{t^p}\right)$ où $k \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$
  Cela permet donc immédiatement de conclure à l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}: \ y = mx + p$ sans avoir à mener l'étude pas à pas et, dans le cas du 2nd développement, de préciser également la position de Γ par rapport à $\mathscr{D}$

EXEMPLE N$^{\text{O}}$ 8 Étudier les branches infinies de Γ : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2(t+1)}{t-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t^2-1} \end{cases}$

II-5) Plan d'étude d'une courbe paramétrée

II-5-a) Domaine d'étude

EXEMPLE N$^{\text{O}}$ 9 On considère **l'astroïde** donnée par la représentation $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

On note $\mathrm{M}(t)$ le point de paramètre t de l'astroïde.

1. Comparer les points $\mathrm{M}(t+2\pi)$ et $\mathrm{M}(t)$. On suppose qu'on a construit le support de Γ pour $t \in [a, a+2\pi]$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé. Comment construire le support de Γ sur $\mathbb{R}$?
2. Trouver une symétrie entre les points $\mathrm{M}(-t)$ et $\mathrm{M}(t)$. On suppose qu'on a construit le support de Γ sur $[0, +\infty[$. Comment construire le support de Γ sur $\mathbb{R}$?
3. Trouver une symétrie entre les points $\mathrm{M}(\pi - t)$ et $\mathrm{M}(t)$. Si on connaît Γ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, quelle portion de Γ peut-on construire ?
4. Trouver une symétrie entre les points $\mathrm{M}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$ et $\mathrm{M}(t)$. Sur quel domaine D suffit-il de connaître Γ pour obtenir un tracé sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
5. En réalisant le bilan des questions précédentes, proposer un domaine d'étude D le plus petit possible suffisant pour construire le support de Γ sur $\mathbb{R}$ à partir du support sur D en appliquant des transformations géométriques.

<u>Cas général</u> : Pour obtenir le tracé du support de la courbe paramétrée Γ associée à $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}\right]$,
il n'est pas toujours nécessaire d'étudier f sur la totalité de $\mathscr{D}_f$.
On peut en effet exploiter les propriétés géométriques du support pour restreindre l'étude à un domaine $\mathscr{D} \subset \mathscr{D}_f$.
On utilise alors un changement de paramètre $\left[\varphi : \mathscr{D} \rightarrow \mathscr{D}_f\right]$ de sorte que $\mathscr{D} \cup \varphi(\mathscr{D}) = \mathscr{D}_f$ et tel que la connaissance de Γ sur $\mathscr{D}$ permet de construire Γ sur $\varphi(\mathscr{D})$ à l'aide d'une transformation géométrique.
Les situations les plus classiques sont :

- exploiter une T périodicité de x et y en comparant $\mathrm{M}(t+\mathrm{T})$ et $\mathrm{M}(t)$
- exploiter une parité/imparité de x et y en comparant $\mathrm{M}(-t)$ et $\mathrm{M}(t)$
- exploiter des propriétés trigonométriques de x et y en comparant $\mathrm{M}(\pi - t)$ et $\mathrm{M}(t)$, $\mathrm{M}\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$ et $\mathrm{M}(t)$ ou $\mathrm{M}\left(\dfrac{\pi}{2} + t\right)$ et $\mathrm{M}(t)$
- lorsque $\mathrm{D}_f =]a, b[\cup]\frac{1}{b}, \frac{1}{a}[$, réduire l'étude à $]a, b[$ en comparant $\mathrm{M}\left(\frac{1}{t}\right)$ et $\mathrm{M}(t)$

Les transformations géométriques les plus classiques sont :

- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) + \alpha \\ y(\varphi(t)) = y(t) + \beta \end{cases}$ où
- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$ où
- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$ où
- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$ où
- $\begin{cases} x(\varphi(t)) = y(t) \\ y(\varphi(t)) = x(t) \end{cases}$ où

SUITE EXEMPLE N° 9 Expliciter un domaine d'étude pour **la cycloïde** donnée par la représentation

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{R}(t - \sin t) \\ y(t) = \mathrm{R}(1 - \cos t) \end{cases}, t \in \mathbb{R} \ (\mathrm{R} > 0 \text{ est fixé})$$

II-5-b) Plan d'étude

Le plan d'étude suivant détaille les différentes étapes nécessaires pour mener l'étude d'une courbe paramétrée. C'est donc la démarche à mettre en œuvre pour répondre à la question « Étudier la courbe paramétrée... ». Dans un problème ou un exercice détaillé, il s'agira,à travers les questions posées , de repérer ces différentes étapes.

Méthode : Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Soit Γ une courbe paramétrée associé à la fonction vectorielle $\left[\begin{array}{rcl} f : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \mathrm{M}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}\right]$

1. on détermine le domaine de définition $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_x \cap \mathrm{D}_y$
2. on recherche un domaine d'étude D en exploitant les symétries du support. **Attention** ! Il faut clairement expliciter, à chaque étape, le nouveau domaine d'étude et la transformation géométrique associée.
3. on justifie les variations de x et de y sur D qu'on résume dans un tableau de variations commun
   Les valeurs remarquables (zéros des dérivées, valeurs ou limites aux bornes de D) doivent être justifiées en utilisant, si besoin, des équivalents pour les limites.

   A ce stade de l'étude, on peut repérer dans le tableau de variation :

   - les tangentes horizontales (resp. verticales) où y' s'annule mais pas x' (resp. où x' s'annule mais pas y')
   - les points stationnaires où x' et y' s'annulent en même temps qu'il faudra étudier
   - les points limites lorsque x et y admettent une limite finie en une extrémité non incluse du domaine d'étude
   - les asymptotes horizontales ou verticales lorsque l'une des coordonnées part à l'infinie et pas l'autre
   - les branches infinies à étudier lorsque les deux coordonnées partent à l'infinie en même temps
4. On étudie les branches infinies éventuelles (en précisant si besoin la position de la courbe par rapport aux asymptotes).
5. On étudie les points stationnaires éventuels en précisant la tangente et la nature du point.
6. On précise la tangente aux points limites éventuels.
7. On réalise une esquisse de la courbe qui doit mettre en évidence tous les éléments dégagés dans l'étude.

SUITE EXEMPLE N° 9 Étudier complétement l'astroïde et la cycloïde.

II-5-c) Etudes complémentaires

Pour préciser un tracé, il peut être intéressant (et donc faire l'objet de questions dans un problème)

- de rechercher les points d'inflexions (qui peuvent ne pas être stationnaire $p = 1$ impair et q impair)
  Dans tous les cas, si $\mathrm{M}(t)$ est un point d'inflexion, $f'(t)$ et $f''(t)$ sont colinéaires et l'équation suivante est vérifiée :
  $$\det\left(f'(t), f''(t)\right) = 0 \Leftrightarrow x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) = 0$$
- de rechercher les points multiples.
  On dit qu'un point A est un point simple de Γ s'il existe un unique t dans D_f avec $\mathrm{A} = \mathrm{M}(t)$
  On dit qu'un point A est un point double de Γ s'il existe (t_1, t_2) dans D_f avec $\mathrm{A} = \mathrm{M}(t_1) = \mathrm{M}(t_2)$
  On définit de même les points triples, etc,...

EXEMPLE N° 10 Montrer que la courbe paramétrée définie par $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 3t^3 + 2 * t^2 - t - 1 \\ y(t) = 3 * t^2 + 2 * t + 1 \end{array}\right.$ admet un point double et déterminer les deux tangentes correspondantes.