CHAPITRE 0: RÉVISIONS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans tout le chapitre E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Espace vectoriel (généralités)

Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ alors

- les éléments x de E sont appelés et les éléments λ de $\mathbb{K}$ sont appelés
- il y a une loi interne + qui est commutative :
  et associative :
- il y a une multiplication externe à opérateur dans $\mathbb{K}$:
- une combinaison linéaire de vecteurs de E est un vecteur
- E contient au moins un vecteur appelé vecteur nul, noté 0_E ou simplement 0 qui vérifie :
  Tous les vecteurs de E ont un opposé : l'opposé de x dans E est et il vérifie
- On dispose, par définition, de relations de calcul entre les deux lois : $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$
  1) , 2) , 3) et 4)
- On démontre alors la règle de calcul très utile : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda.x = 0_E \Leftrightarrow$
- une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

  Toute combinaison linéaire de vecteurs de F est encore un vecteur de F (stabilité par combinaison linéaire)

II) Famille de vecteurs (généralités)

Une famille $\mathscr{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E est

- une famille génératrice de E si « tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille » :
- une famille libre dans E (ou encore que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont linéairement indépendants) si
  « toute combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille est forcément triviale » :
- une base de E si

Remarque : Une famille (u, v) de deux vecteurs est libre lorsque
mais une famille de trois vecteurs peut être liée même si les vecteurs sont deux à deux non colinéaires.

Contre-ex : Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (1,1,0)$, $v = (0,0,1)$ et $w = (1,1,1)$

Attention au SENS de ce que vous écrivez! Commentez les corrections suivante
« La famille est clairement libre car les 3 vecteurs sont non ~~colinéaire~~ » PAS DE SENS ICI!

« Des vecteurs non coplanaires forment une famille libre. » IMPRECIS! COMBIEN DE VECTEURS?

Un résultat à connaître : Dans $\mathbb{K}[X]$, une famille de polynômes à degrés distincts est libre.

III) *Espace vectoriel de dimension finie et bases*

E est un espace vectoriel de dimension finie si

Dans ce cas, on peut toujours construire une base de E (théorème d'existence des bases en dimension finie)

- soit par le théorème de la base extraite :

- soit par le théorème de la base incomplète :

De plus, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs qu'on appelle la dimension de E.

A retenir ! Pour vérifier qu'une famille $\mathscr{F}$ est une base de E, on peut vérifier :

i) c'est une famille de vecteurs de E ii) c'est une famille libre iii) c'est une famille génératrice de E

Avec i), on a déjà l'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{E}$

Lorsqu'on sait qu'on connaît la dimension de E, on dispose des équivalences suivantes

une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs de E est une base de E $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Pour vérifier que $\mathscr{F}$ est une base de E, on vérifie alors, en général : i), ii) et iv) $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = \dim \mathrm{E}$.

Espaces vectoriels de référence de dimension finie

Espaces E	0_E	$\dim \mathrm{E} =$	base canonique
$\mathbb{R}^n$			
$\mathbb{C}^n$			
$\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$			
$\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$			

Espaces qui ne sont pas de dimension finie (Par l'absurde en exhibant une famille libre de cardinal aussi grand que voulu)

$\mathbb{K}[\mathrm{X}]$

$\mathbb{K}^\mathrm{I}$ où I est un ensemble quelconque

et, en particuliers $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Méthode : Démontrer qu'un espace est un espace vectoriel et préciser éventuellement la dimension

Pour démontrer qu'un espace F donné est un espace vectoriel, on vérifie, en général, que c'est un sev d'un espace de référence. On peut, pour cela :

- soit revenir à la définition en montrant que c'est un sev de l'espace E de référence à identifier
- soit vérifier que c'est un sev engendré dans l'espace E de référence à identifier

Si on demande, en plus, de préciser la dimension de cet espace F, alors la vérification par retour à la définition n'est pas utile car il faudra de toute façon rechercher une famille génératrice pour préciser une base.

En pratique, l'espace F sera introduit dans le sujet

- soit à l'aide de paramètres décrivant directement les vecteurs de F et qui conduit naturellement à la structure de sev engendré
- soit à l'aide d'une (ou plusieurs) équation(s) caractérisant l'appartenance d'un vecteur à F

EXEMPLE N° 1 Dans chaque cas, prouver que F est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

a) $F=\{(t+2s,-t,4s-t)\mid(t,s)\in\mathbb{R}^2\}$ b) $F=\{(\alpha+\beta)X^2+(\alpha-\beta)\mid(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\}$ c) $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0\\ 0 & ia+b & b+2ic\end{pmatrix}\mid(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

d) $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{K}^4\mid x+y+z+t=x-y+z-t=0\}$

e) F contient les polynômes réels de degrés au plus 3 avec $P(1)=P^{(3)}(1)=0$

f) F est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$

g) F est l'ensemble des suites réelles vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_n$

IV) Coordonnées, changement de bases

Si $\mathscr{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base du $\mathbb{K}$ev E alors

on définit la colonne $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ des coordonnées du vecteur x de sorte que

Si $\mathscr{B}'=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ est une autre base du $\mathbb{K}$ev E alors

on trouvera une autre colonne $X'=\begin{pmatrix}x'_1\\ \vdots\\ x'_n\end{pmatrix}$ de coordonnées du vecteur x de sorte que

En changeant de bases, les coordonnées ont changées mais le vecteur x lui reste le même!

Exemples : Le vecteur $x=(3,2)$ dans $\mathscr{B}=(e_1,e_2)=\big((1,0),(0,1)\big)$ a pour coordonnées $X=$

mais dans $\mathscr{B}'=(e'_1,e'_2)=\big((1,1),(1,0)\big)$ la colonne de coordonnées est $X'=$

Dans le sev $E=\mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ rapporté à la base $\mathscr{B}=\big([x\mapsto 1],[x\mapsto\cos^2 x]\big)$, les coordonnées de $f=[x\mapsto\sin^2 x]$

sont $X_f=$ et celles de $g=[x\mapsto\cos(2x)]$ sont $X_g=$

Attention! Un vecteur n'est pas égale à ses coordonnées (en général, x et X ne sont pas de la même nature...) sauf dans le cas très particulier des coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$
D'une manière générale, les coordonnées dans les bases canoniques sont en général simple. Par exemple, il s'agit pour une matrice M de $M_{np}(\mathbb{K})$ de pour un polynôme P de $\mathbb{K}^n[X]$ de

Lorsqu'on dispose de deux bases $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{B}'=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ pour un même espace vectoriel E, on peut relier les coordonnées X et X' à l'aide des matrices de passages selon la relation

où P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$: $P=P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}=$

autrement dit la colonne j de la matrice de passage correspond

Par construction : la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est inversible et $P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}=$

Exemples : Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté aux bases $\mathscr{B}=\big((1,0),(0,1)\big)$ et $\mathscr{B}'=\big((1,1),(1,0)\big)$

$P=P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}=$ et $P^{-1}=P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}=$

Pour $x=(3,2)$, on a vérifie : $X=PX'$ puisque

EXEMPLE N° 2 Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit $e_1=1,\ e_2=1+X,\ e_3=(1+X)^2$ et $e_4=(1+X)^3$

1. Prouver que $\mathscr{B}'=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. Quel espace connu E engendre-t-elle ?

2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E. Donner les matrices de passage entre les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

3. En déduire une primitive de $\left[f:x\mapsto(x^3+2x^2)(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]$

V) Formule de Grassmann et sev supplémentaires

- Si F est un sev d'un espace vectoriel E de dimension finie alors $\dim \mathrm{F}$ $\dim \mathrm{E}$
- Si F et G sont deux sev d'un espace vectoriel E de dimension finie alors :

$$\mathrm{F} = \mathrm{G} \Leftrightarrow$$

- Si F et G sont des sev d'un espace vectoriel E de dimension finie alors : $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) =$
- Si F et G sont deux sev d'un espace vectoriel E quelconque, on dit que
  F et G sont supplémentaires noté $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$ lorsque et on a :

  $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

- Dans l'espace vectoriel E de dimension finie, si F et G sont les sev définies par les bases $\mathscr{B}_\mathrm{F}$ et $\mathscr{B}_\mathrm{G}$
  - la famille $\mathscr{B}_\mathrm{F} \cup \mathscr{B}_\mathrm{G}$ est du sev $\mathrm{F} + \mathrm{G}$
  - $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\} \Leftrightarrow$ la famille $\mathscr{B}_\mathrm{F} \cup \mathscr{B}_\mathrm{G}$ est
  - si F et G sont supplémentaires, la famille $\mathscr{B}_\mathrm{F} \cup \mathscr{B}_\mathrm{G}$ est

  Méthode : Comment construire un supplémentaire ? En vertu du théorème de la base incomplète, on construit un supplémentaire de F dans E en

EXEMPLE N° 3 Soient $\mathrm{F} = \left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(1) = 0\right\}$ et $\mathrm{G} = \left\{(2a - b + c)\mathrm{X}^2 + (b + a + 2c)\mathrm{X} + a + b + 2c) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$

1. Prouver que F et G sont des sev de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$
2. Déterminer une base de F et une base de G
3. Déterminer une base de $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ et, en déduire $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$
4. Déterminer $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$.
5. Donner une base de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ et donner un supplémentaire de $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ dans F.

VI) Application linéaire (généralité)

- Étant donné deux espaces vectoriels E et F sur le même corps $\mathbb{K}$ et soit une application $f : E \to F$,
  f est linéaire lorsque et on note alors $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

  On dit que f est un endomorphisme et on note simplement $f \in \mathscr{L}(E)$ lorsque
  $\mathscr{L}(E,F)$ est aussi un espace vectoriel sur le même corps $\mathbb{K}$.
  Si E, F et G sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ alors : $\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \forall g \in \mathscr{L}(F,G)$,
- Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, on lui associe les sev
  Ker f qui est un sev de E définit par : Ker $f =$

  Im f qui est un sev de F définit par : Im $f =$ $=$
  Si E est un espace de dimension finie rapporté à une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ alors Im $f =$

  On a : f est injective (càd) $\Leftrightarrow$
  f est surjective (càd) $\Leftrightarrow$

  On dit que f est un isomorphisme lorsque
  On dit que f est un automorphisme lorsque
- Théorème du rang :
  Le rang de f, lorsqu'il existe, est noté rg$f$ et vaut : .
- Corollaire : Si $n = \dim E = \dim F < +\infty$ alors
  $$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective} \Leftrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} f = n$$

EXEMPLE N° 4 Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie n et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence :
$$\ker f = \operatorname{Im} f \Leftrightarrow f^2 = 0 \text{ et } n = 2\operatorname{rg} f$$

VII) Matrice d'une application linéaire

Étant donné deux espaces vectoriels E et F sur le même corps $\mathbb{K}$ de dimensions finies respectives n et p,
une application linéaire f de $\mathscr{L}(E,F)$ est totalement caractérisée par l'image d'une base $\mathscr{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E
Si on connaît les vecteurs $\left(f(e_i)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ alors :

$\forall x \in E, \ f(x) =$

Si on connaît une base $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ de F, pour caractériser les vecteurs $\left(f(e_i)\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$, il suffit de connaître les coordonnées ainsi on peut totalement définir f via sa matrice relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) =$ qui est dans
La colonne j de la matrice donne les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de x dans $\mathscr{B}_E$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$ alors les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathscr{B}_F$ sont $Y =$

Dans le cas d'un endomorphisme, la matrice est carrée et on note simplement $\mathrm{Mat}_B(f)$ si on utilise la même base pour les coordonnées de x et de $f(x)$.
L'application $\left[f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)\right]$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ vers $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de sorte que
- $\forall (f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(\alpha f + g) =$
- $\dim \mathscr{L}(E,F) =$ et, en particulier, $\dim \mathscr{L}(E) =$

Si E, F et G sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et de dimensions finies rapportées à des bases $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ alors $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) =$ Attention à la cohérence des tailles des matrices !

On parle de matrice canoniquement associée à une application linéaire ou d'application linéaire canoniquement associée à une matrice lorsque les bases de E et de F sont les bases canoniques.
On définit alors les notions de noyau, d'image, de rang pour une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ comme le noyau, le rang et l'image de l'application linéaire de qui lui est canoniquement associée de sorte que

Ker A est un sev de et Im A est un sev de

Le rang de A vu comme $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Im}\, A$

Méthode : Noyau/Image d'une application linéaire à l'aide de sa matrice

Lorsque E et F sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ de dimensions finies et $f \in \mathscr{L}(E,F)$, on détermine Ker f et Im f en utilisant la matrice A de f dans des bases quelconques $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ via Ker A et Im A.

Attention ! En général, Ker $f \neq$ Ker A et Im $f \neq$ Im A mais les vecteurs d'une base de Ker A (resp Im A) donnent les coordonnées dans $\mathscr{B}_E$ (resp $\mathscr{B}_F$) des vecteurs d'une base de Ker f (resp Im f).

- Les colonnes de A forment une famille génératrice de Im A aussi on peut souvent trouver "facilement" une base de Im A et calculer rg(A) en observant les relations sur les colonnes de A. Le théorème du rang permet alors d'obtenir dim Ker A et les relations observées sur les colonnes permettent de trouver ensuite une base de Ker A.
- si on ne trouve pas facilement le rang alors on commence par déterminer le noyau de A qui est l'ensemble des solutions du système AX = 0. Le théorème du rang donne alors le rang de A et il reste à choisir une famille libre de taille rg(A) parmi les colonnes de A (qui sont tous des vecteurs de Im A)

EXEMPLE N° 5 Donner le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et des produits de ces matrices.

EXEMPLE N° 6 Préciser le noyau et l'image des endomorphismes f et g de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que

$$f \text{ vérifie } \quad \forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P(1) - P(1)X + P(-1)X^2 - P(-1)X^3$$

$$g \text{ est canoniquement associée à } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème : Caractérisation matricielle d'un isomorphisme

Si E et F sont des $\mathbb{K}$ev avec $\dim E = \dim F = n$, $\mathscr{B}_E$ est une base de E, $\mathscr{B}_F$ est une base de F.

$$f \in \mathscr{L}(E,F) \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \text{ est inversible} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, A = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n$$

Dans ce cas, on peut définir l'isomorphisme réciproque $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$ qui est tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f^{(-1)}) = A^{-1}$

EXEMPLE N° 7 On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Quel est le degré de $f(1,1,0)$?

2. Justifier que f est un isomorphisme en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.

3. On admet que $\quad A^3 - 3A^2 + A - 5I_3 = 0 \quad$ Retrouver d'une autre façon que f est un isomorphisme.

4. Quel est antécédent du polynôme $1+2X+3X^2$ par f ?

Formule de changement de bases :

Théorème : (Rappels PTSI) Formules de changement de bases

- Matrice de passage entre deux bases
  Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de E alors
  la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} =$
  C'est une matrice inversible et on a : $\left(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\right)^{-1} =$
- Formule de changement de bases pour les coordonnées
  Si on note X et X′ les coordonnées d'un vecteur x de E dans $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a la relation
- Formule de changement de bases pour les matrices d'une application linéaires
  Si E et F sont des espaces de dimensions finies avec - $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$
  - $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F et $Q = P_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}$
  - $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$
  alors la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ vérifie la relation
- Formule de changement de bases pour les matrices d'un endomorphisme
  Dans le cas où E = F, $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, $\mathscr{B}' = \mathscr{C}'$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ la relation devient

Cohérence des relations matricielles :
Si X (resp X′) les coordonnées du vecteurs x de E dans $\mathscr{B}_E$ (resp dans $\mathscr{B}'_E$)
et Y (resp Y′) les coordonnées du vecteurs $f(x)$ de F dans $\mathscr{B}_F$ (resp dans $\mathscr{B}'_F$)
on a les relations matricielles :
aussi soit

EXEMPLE Nº 8 On définit f sur $M_2(\mathbb{R})$ par $f(A) = (a+b)X^2 + (b+c)X + (c+d)$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

et également $g \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}_2[X], M_2(\mathbb{R})\right)$ canoniquement associée à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. a. On admet que f est linéaire. Rappeler ce que cela signifie.
b. Préciser Ker f. En déduire que f est surjective non injective.
c. Donner la matrice canoniquement associée à f.
2. Justifier que g est injective non surjective.
3. Préciser la matrice canoniquement associée à $g \circ f$ et l'image par $g \circ f$ de $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
4. Prouver que Ker $(g \circ f)$ = Ker f puis que Im $(g \circ f)$ = Im g

EXEMPLE Nº 9 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ associé à $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 0 \\ 13 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$

1. Calculer l'image par f de $P = -X^2 + 3X + 2$. Que peut-on en déduire pour l'application f ?
2. Préciser le noyau et l'image de f.
3. Donner la matrice canoniquement associé à $f + id$. En déduire un polynôme Q de $\ker(f + id)$.
4. Proposer de même un polynôme R de $\ker(f - 2id)$.
5. Prouver que $\mathscr{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice A′ de f dans cette base.
6. Préciser les matrices de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Exprimer A′ à l'aide de A et P.

VIII) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

VIII-1) Endomorphisme identité, matrice de passage et changement de bases

Définition : identité de E

On appelle endomorphisme identité de E notée id_E l'application de E dans E telle que : $\forall x \in E,\ id_E(x) = x$

Proposition : Matrice de l'identité

Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,

- si $\mathscr{B}$ est une base de E alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(id_E) =$
- si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(id_E) =$

VIII-2) Homothétie

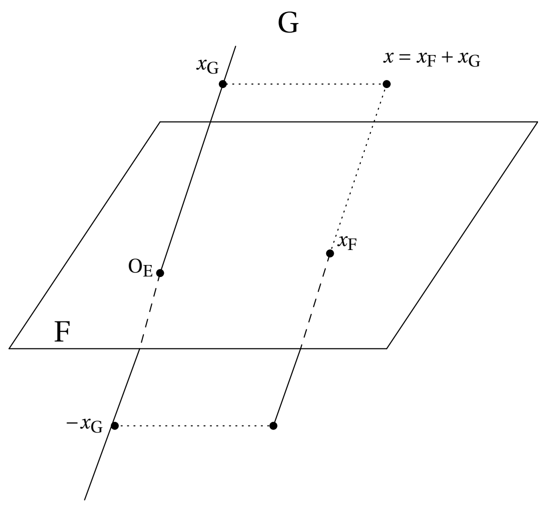
Définition : homothétie

On appelle homothétie de E de rapport k l'application linéaire $h = k\,id_E$ autrement dit : $\forall x \in E,\ h(x) = kx$

Si E est de dimension finie rapporté à une base $\mathscr{B}$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) =$

VIII-3) Projecteurs et symétries vectorielles

Soit F et G des sous-espace supplémentaires d'un espace vectoriel E autrement dit $F \oplus G = E$
Si x est un vecteur quelconque de E, il se décompose dans $E = F \oplus G$ en $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$
Le projeté de x sur F parallèlement à G est le vecteur $p(x) =$
Le symétrique de x par rapport à F parallèlement à G est $s(x) =$



Le dessin ci-dessus, en dimension 3, n'a pas vocation à représenter la réalité mais il aide à la comprendre...

Définition et proposition : Projecteur sur F parallèlement à G, Symétrie par rapport à F parallèlement à G

Si $E = F \oplus G$, on sait que : $\forall x \in E, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G$

• On définit le **projecteur** p_F sur F parallèlement à G par : $\forall x \in E,\ p_F(x) = x_F$

p_F est alors un endomorphisme de E (càd $p_F \in \mathscr{L}(E)$) avec Im $p_F =$ et Ker $p_F =$

L'ensemble des vecteurs invariants par p_F est Ker $(p_F - id) =$ *Il s'agit des vecteurs tels que $p_F(x) = x$*

Si p_G est le projecteur sur G parallèlement à F alors : $p_F + p_G = id_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = 0_{\mathscr{L}(E)}$

• On définit la **symétrie** s_F par rapport à F parallèlement à G par : $\forall x \in E,\ s_F(x) = x_F - x_G$

s_F est alors un automorphisme de E (endomorphisme bijectif) avec $s_F \circ s_F = id_E$ (autrement dit $s_F^{-1} = s_F$)

L'ensemble des vecteurs invariants est Ker $(s_F - id_E) =$ *Il s'agit des vecteurs tels que $s_F(x) = x$*

On a aussi Ker $(s_F + id_E) =$ *Il s'agit des vecteurs tels que $s_F(x) = -x$*

Si p_F est le projecteur sur F parallèlement à G alors : $s_F = 2p_F - id_E$

Théorème : Caractérisation des projecteur

Soit $p : E \to E$ alors p est un projecteur $\Leftrightarrow$ $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p \circ p = p$

Matriciellement, si $p \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans une base quelconque de E : $p \circ p = p \Leftrightarrow A^2 = A$

On a alors $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et p est le projecteur sur Im p parallèlement à Ker p

Théorème : Caractérisation des symétries

Soit $s : E \to E$ alors s est une symétrie $\Leftrightarrow$ $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s \circ s = id_E$

Matriciellement, si $s \in \mathscr{L}(E)$ de matrice A dans une base quelconque de E : $s \circ s = id \Leftrightarrow A^2 = I_n$

On a $E = \text{Ker }(s - id_E) \oplus \text{Ker }(s + id_E)$ et s est la symétrie par rapport à Ker $(s - id_E)$ parallèlement à Ker $(s + id_E)$

Proposition : matrice d'un projecteur dans une base adaptée

Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
si p est un projecteur de E et si $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base adaptée à la somme $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ alors

$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(p) =$

Proposition : matrice d'une symétrie dans une base adaptée

Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
si s est une symétrie de E et si $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base adaptée à la somme $E = \text{Ker }(s - id_E) \oplus \text{Ker }(s + id_E)$ alors

$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(s) =$

EXEMPLE N$^{\text{O}}$ 10 Dans $\mathbb{R}^4$ où on note (x, y, z, t) les coordonnées dans la base canonique.

1. Identifier géométriquement l'endomorphisme q canoniquement associé à la matrice $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère le sous-espace vectoriel F donné par les équations $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - t = 0 \end{array} \right.$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\Big((1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\Big)$

2. Prouver que F et G sont supplémentaires.
Préciser la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.

3. Donner la matrice S dans la base canonique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

4. Justifier qu'il existe une matrice inversible P qu'on précisera telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{SP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{D}$