PT : Bilan PTSI-PT sur le calcul des puissances itérées d'une matrice carrée

Il est très courant de décrire l'état d'un système à l'aide d'un certain nombre de paramètres (ici n) qu'on peut résumer dans un seul vecteur colonne X de $\mathbb{K}^n$.
Pour étudier l'évolution d'un système, on regarde l'évolution des paramètres dans le temps. Bien souvent, on choisit d'évaluer la situation à intervalles réguliers de temps de sorte qu'on ramène le problème où la connaissance du système à l'instant $t = k$ consiste à déterminer un vecteur X_k de $\mathbb{K}^n$.

En général, on connaît l'état initial X_0 et une relation de récurrence matricielle $X_{k+1} = AX_k$ où A est une matrice carrée d'ordre n fixée ($A \in M_n(\mathbb{K})$) traduisant la loi d'évolution du système.
Il est très simple d'établir qu'alors : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_k = A^k X_0$ (par récurrence avec l'hypothèse HR_k : « $X_k = A^k X_0$ »)

Il s'agit donc d'apprendre à calculer les matrices A^k pour $k \in \mathbb{N}$ (qu'on appelle les puissances itérées de A)

Résumons les différentes approches rencontrées dans le cours de PTSI-PT :

1. Calcul par une démonstration par récurrence

En examinant les premières puissances de A, on peut parfois établir une conjecture qu'on démontre par récurrence. Parfois, la conjecture est suggérée par le sujet ou alors on a demandé explicitement le calcul des premières puissances de A. Attention toutefois à ne pas perdre trop de temps à bâtir une conjecture que vous n'arriverez pas à finaliser : il y a d'autres méthodes pour calculer A^k...

2. Calcul à l'aide de la formule du binôme de Newton

$$\boxed{\text{Si } (M,N) \in M_n(\mathbb{K}) \text{ avec } MN = NM \text{ alors } (M+N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} M^{k-j} N^j}$$

Le sujet vous propose de remarquer que $A = \lambda I + N$ où N est nilpotente (càd que $N^k = 0$ pour $k \geqslant p$) en vous proposant de calculer par exemple $(A - \lambda I)^p$ par exemple.

Les matrices $M = \lambda I$ et N commutent toujours ($\lambda I \times N = \lambda N = N \times \lambda I$) donc on peut appliquer la formule du binôme.

L'indice de nilpotence p est en général petit (il vaut 2 ou 3...). Prenons, par exemple $p = 3$.

$$A^k = \underbrace{1 \times (\lambda I)^k \times N^0}_{\text{cas } j=0} + \underbrace{k \times (\lambda I)^{k-1} \times N^1}_{\text{cas } j=1} + \underbrace{\frac{k(k-1)}{2} \times (\lambda I)^{k-2} \times N^2}_{\text{cas } j=2} + \underbrace{0}_{\text{car } N^j=0}$$

vu que $\binom{k}{0} = 1$ (prendre 0 élément parmi k) $\quad \binom{k}{1} = 1$ (prendre 1 élément parmi k) $\quad \binom{k}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{2}$

Mais : $(\lambda I)^k = \lambda^k I$ (matrice diagonale) donc $A^k = \lambda^k I + k\lambda^{k-1} N + \dfrac{k(k-1)}{2} \times \lambda^{k-2} N^2$

3. Calcul à l'aide du théorème de division euclidienne

$$\boxed{\text{Si } P_1 \in \mathbb{K}[X] \text{ et } P \in \mathbb{K}[X] \text{ avec } P \neq 0, \text{ la division euclidienne de } P_1 \text{ par } P \text{ est : } \exists!(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2,\ P_1 = P \times Q + R \quad \text{où } \deg(R) < \deg P}$$

Le sujet vous propose de remarquer que $P(A) = 0$ pour un certain polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$

Attention ! *Si* $P = a_q X^k + a_{q-1} X^{q-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ *alors* $P(A) = a_q A^q + a_{q-1} A^{q-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$

Veillons au SENS : $a_0 = a_0 \times 1 = a_0 \times X^0$

Il peut, par exemple, demander de vérifier que la famille (I, A, A^2) est liée : la CL non triviale de liaison vous donne un polynôme annulateur de degré 2. En général, le polynôme annulateur P est de petit degré. On prendra ici $\deg P = 2$. **On écrit alors la division euclidienne de X^k par P :**

$\exists (Q_k, R_k) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad X^k = P \times Q_k + R_k$ or $\deg R_k < \deg P = 2 \Rightarrow R_k = \alpha_k X + \beta_k$ avec $(\alpha_k, \beta_k) \in \mathbb{K}^2$

En évaluant pour $X = A$: $A^k = \underbrace{P(A)}_{=0} \times Q_k(A) + R_k(A) = 0 + \alpha_k A + \beta_k I$ donc il s'agit de calculer α_k et β_k...

On doit donc **savoir déterminer (rapidement) des restes de divisions euclidiennes** (classique de PTSI).

Exemples : Déterminons le reste de la division de X^k par P quand :

a. $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ On a $X^k = P \times Q + R$ avec $R = \alpha X + \beta$ car $\deg R < \deg P = 2$

On évalue pour $X = 1$: $1^k = 0 \times Q(1) + R(1) \Leftrightarrow 1 = \alpha + \beta$ (1)

On évalue pour $X = -1$: $(-1)^k = 0 \times Q(-1) + R(-1) \Leftrightarrow (-1))^k = -\alpha + \beta$ (2)

Les équations (1) et (2) permettent de déterminer α et β et donc R.

b. $P = (X-1)^2$ On a encore $X^k = P \times Q + R$ où $R = \alpha X + \beta$

On retrouve (1) en évaluant pour X = 1. On trouve une deuxième équation en dérivant puis en évaluant à nouveau en X = 1 (1 est racine double donc racine de P et de P′) : $kX^{k-1} = P' \times Q + P \times Q' + R'$ d'où $k = 0 + 0 + \alpha$ (2)

c. $P = X^2 + 1$ On a la encore $X^k = P \times Q + R$ où $R = \alpha X + \beta$

On trouve deux équations sur α et β en utilisant les racines complexes i et $-i$.

$$i^k = \alpha i + \beta \ \ (1) \quad \text{et} \quad (-i)^k = -\alpha i + \beta \ \ (2)$$

Pensez à exploiter les nombres complexes pour simplifier au maximum α et β qui sont des réels :

Avec (1)+(2) : $\beta = \dfrac{i^k + (-i)^k}{2} = \dfrac{e^{ik\frac{\pi}{2}} + e^{-ik\frac{\pi}{2}}}{2} = \cos\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$ (formule d'Euler)

Avec (1)-(2) : $\alpha = \dfrac{i^k - (-i)^k}{2i} = \dfrac{e^{ik\frac{\pi}{2}} - e^{-ik\frac{\pi}{2}}}{2i} = \sin\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$ (formule d'Euler)

4. Calcul à l'aide d'une réduction de la matrice A **Technique à privilégier en l'absence d'indication du sujet !**

On réduit la matrice A : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ avec $P^{-1}AP = D$ (resp. T) si A est diagonalisable (si A non diagonalisable)

Les matrices A et D représentent le même endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ dans des bases différentes et P est la matrice de passage. Les matrices A^k et D^k représentent l'endomorphisme f^k relativement au mêmes bases et donc avec la même matrice de passage P. Ainsi : $P^{-1}A^kP = D^k \Leftrightarrow A^k = PD^kP^{-1}$ (resp. $P^{-1}A^kP = T^k \Leftrightarrow A^k = PT^kP^{-1}$)

On sait déterminer la matrice P puis la matrice P^{-1} (Bon, va falloir relever ses manches pour le calcul…)

Si D est diagonale, $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors $D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$

Si T est triangulaire (et on a déjà dû vous guidez pour la forme de T si $n \geqslant 3$), probablement qu'elle peut s'écrire $T = \lambda I + N$ d'où l'utilisation de la méthode 2 pour calculer T^k.

Pour les calculs matriciels, pensez à exploiter des techniques plus performantes pour le calcul (pré-multiplication qui agit sur les lignes, post-multiplication qui agit sur les colonnes).